This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

GODFREY LOWELL CABOT SCIENCE LIBRARY
of the Harvard College Library

This book is
FRAGILE
and circulates only with permission.
Please handle with care
and consult a staff member
before photocopying.

Thanks for your help in preserving
Harvard's library collections.

TRAITÉ

DE

MÉCANIQUE GÉNÉRALE.

ΔΕΙΟ ΘΕΩΣ ΓΕΝΟΛΕΙΤΡΕΙ

TRAITÉ

DE

MÉCANIQUE GÉNÉRALE

COMPRENANT

LES LEÇONS PROFESSÉES A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ET

A L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES,

PAR H. RESAL,

MEMBRE DE L'INSTITUT,

INSPECTEUR GÉNÉRAL DES MINES.

TOME SEPTIÈME.

Développements sur la Mécanique rationnelle et la Cinématique pure, comprenant de nombreux Exercices.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1889

(Tous droits réservés.)

Eng 258.73

JUN 20 1917
TRANSFERRED TO
HARVARD COLLEGE LIBRARY

MAY 3 1894

Scientific School.

~~400.15~~

2
10 VII

AVANT-PROPOS.

Le programme de l'École Polytechnique comporte actuellement l'enseignement de la partie essentielle de la Mécanique analytique. Cette innovation récente, sans précédent, a eu pour conséquence de donner, d'autre part, de l'extension à l'ancienne Mécanique rationnelle, et d'exiger, dans le Cours d'Analyse, la réintroduction du calcul ou méthode des variations.

Les Tomes I et II, et accessoirement les suivants, de cet Ouvrage présentent ainsi des lacunes que je me propose de combler dans ce Volume.

A l'exemple de quelques auteurs du commencement de ce siècle et pour éviter au lecteur des recherches fastidieuses, j'ai cru devoir donner, dans une Introduction, un précis du calcul des variations.

Le Chapitre I de ce Volume renferme d'abord un exposé de la méthode de la variation des constantes arbitraires, réduite à ce qui concerne les équations du mouvement d'un point libre dans un plan. Cet exposé est suivi d'une application à la solution, par approximation, du problème du mouvement, dans un milieu dont la résistance est proportionnelle au carré de la vitesse, d'un point attiré par un centre fixe en raison de la distance. Le Chapitre se termine par un second exposé, celui de l'emploi des coordonnées elliptiques dans certains problèmes de Mécanique, avec application au mouvement d'un

point attiré par deux centres fixes en raison inverse du carré de la distance, et par le milieu de la droite qui les joint en raison de la distance.

Le Chapitre II, qui se rapporte au mouvement d'un point sur une courbe fixe, renferme : 1° les démonstrations analytiques des théorèmes de Salladini et de O. Bonnet relatifs à la lemniscate, et du théorème de Jean Bernoulli sur la synchrone de la cycloïde, puis le développement en série de la formule du pendule simple d'après l'élégante méthode de Despeyrous; 2° la théorie des tautochrones de Puiseux; 3° une étude complète des brachistochrones, dont une partie revient à M. E. Roger.

Dans le Chapitre III, je donne une forme nouvelle à l'équation complémentaire en coordonnées rectilignes du mouvement d'un point sur une surface fixe; je reproduis, à quelques différences près, la démonstration, due à M. Darboux, du théorème de Joachimstahl relatif aux lignes géodésiques de l'ellipsoïde. Une nouvelle formule, se rapportant aux lignes géodésiques d'une surface de révolution, me permet d'étendre à toutes les surfaces de révolution du second degré le théorème établi par Gudermann pour l'ellipsoïde seulement. Je donne ensuite les équations du mouvement d'un point sur une surface en coordonnées cylindriques, avec application au cas où la surface est de révolution, et à celui d'un hélicoïde gauche lorsque le point est soumis à l'action d'une force fonction de la distance à l'axe. Le Chapitre se termine par les développements en séries des formules du pendule conique et par la recherche de l'influence d'une résistance d'un milieu proportionnelle au carré de la vitesse sur le mouvement du pendule conique faiblement éloigné de la verticale.

Le Chapitre IV est consacré à la Mécanique analytique proprement dite. Après avoir reproduit les équations générales

du mouvement d'un système à liaisons, j'arrive aux équations de Lagrange en coordonnées quelconques en m'appuyant sur un théorème, préalablement démontré, dû à Hamilton. Ces équations me permettent d'établir celles du mouvement d'un point en coordonnées curvilignes orthogonales, et ces dernières me conduisent aux équations transcendantes des lignes géodésiques de l'ellipsoïde. Je donne ensuite quelques applications des équations de Lagrange, les équations canoniques de Hamilton, le principe de la moindre action (d'après Jacobi) avec quelques applications, la démonstration de Lejeune-Dirichlet relative à la stabilité de l'équilibre; enfin l'étude des petits mouvements d'un système à liaisons complète le Chapitre.

Le Chapitre V est un complément de Statique. J'y démontre d'abord les formules relatives à l'attraction d'un ellipsoïde homogène sur un point, après avoir établi les formules générales de Gauss qui se rapportent à l'attraction; j'arrive ensuite à la forme du solide de plus grande attraction du marquis de Saint-Jacques. En continuant, j'établis plusieurs nouvelles équations relatives à la forme d'équilibre des courbes funiculaires, qui permettent d'arriver immédiatement à la solution des problèmes de la chaînette, des câbles des ponts suspendus, d'un fil sollicité par des forces élémentaires fonctions des distances à un axe fixe. Après avoir dit quelques mots des fils d'égale résistance, je donne des équations du mouvement d'un fil, qui reste compris dans un plan, une démonstration analytique bien plus facile à suivre que la méthode géométrique du Tome II. Le Chapitre se termine, notamment, par une théorie de la vis à filet triangulaire, plus satisfaisante que celle du Tome III, et par une théorie de la vrille et du pieu à vis.

Le Chapitre VI se résume dans l'exposé des propriétés de la polhodie et de l'herpolhodie, et dans une solution, plus

simple que celle de Poisson, du problème du mouvement d'une toupie sur un plan mobile.

Dans le Chapitre VII, j'expose une théorie nouvelle du choc des corps semi-élastiques, qui me conduit, lorsque les corps sont libres et animés de mouvements quelconques, à des résultats aussi simples que dans le choc direct. J'applique ensuite cette théorie au cas où l'un des corps est assujetti à tourner autour d'un axe fixe.

Le Chapitre VIII est consacré à quelques questions d'Hydrodynamique. Bien des géomètres avaient contesté la rigueur de la démonstration que Lagrange a donnée de son théorème relatif à la conservation du potentiel de la vitesse; j'y substitue celle de Cauchy, qui est à l'abri de tout reproche. Je montre ensuite comment, dans quelques cas, les équations de l'Hydrodynamique permettent de résoudre la question du mouvement permanent d'un liquide pesant contenu dans un vase de révolution dont l'axe est vertical. J'avais reproduit presque intégralement au Tome II la substance du Mémoire de Clebsch *Sur le mouvement d'un corps pesant dans un liquide*. J'ai cru devoir revenir sur ce sujet, en vue de simplifier les calculs, surtout ceux qui se rapportent au cas où le solide est un ellipsoïde. Le Chapitre se termine par un exposé de la théorie des ondes liquides empruntée à Poisson, mais en lui faisant subir d'importantes simplifications.

Dans un Appendice, j'ai réuni un certain nombre de questions, de manière à constituer à très peu près, avec la substance des Tomes I et III, une nouvelle édition de mon ancien *Traité de Cinématique pure*. Les principales innovations que j'ai introduites à ce sujet sont les suivantes :

Théorie nouvelle du roulement des surfaces;

Analyse des principaux systèmes articulés qui permettent de décrire la ligne droite et des arcs de cercle;

Propriété de l'accélération d'un point lorsque sa direction est constante ou qu'elle passe par un point fixe;

Recherches nouvelles sur l'accélération d'un point d'un système invariable.

En partant de quelques considérations géométriques exposées au Chapitre qui se rapporte au mouvement relatif, j'ai établi, dans une Note placée à la fin de ce Chapitre, les équations de Bour, qui étendent au mouvement relatif celles de Lagrange, en les faisant suivre de plusieurs applications.

TABLE DES MATIÈRES.

Pages

AVANT-PROPOS V

HUITIÈME PARTIE.

DÉVELOPPEMENTS SUR LA MÉCANIQUE RATIONNELLE ET LA CINÉMATIQUE PURE.

INTRODUCTION.

I.

Méthode des variations. — Préliminaires.

Nos

1, 2, 3, 4, 5. Variation d'une intégrale 1

Des maxima et minima.

6, 7, 8. Équations qui expriment qu'une intégrale est ou un maximum ou un minimum 7

9. Maxima et minima relatifs 9

10, 11. Cas où l'on peut abaisser l'ordre de l'équation différentielle .. 11

Applications à la Géométrie.

12. Lignes de longueur minimum 13

13. Courbe qui, passant par deux points donnés, détermine une surface de révolution minimum 17

14. Courbe passant par deux points donnés, qui détermine avec les normales en ces points et sa développée une aire minimum 20

15. Courbe d'une longueur donnée entre deux points, qui détermine avec un axe et les distances des points à l'axe une aire maximum 21

16. Courbe de longueur donnée entre deux points, qui détermine un volume de révolution maximum 22

N°s Pages

17. Courbe de longueur donnée entre deux points, qui détermine une surface de révolution minimum 23
18. Courbe passant par deux points et qui, sous un volume donné, engendre une surface de révolution minimum..... 24

II.

19. Développement en série trigonométrique de $(1 - 2\alpha\cos\theta + \alpha^2)^{-\nu}$. 25

CHAPITRE I.

DU MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL LIBRE.

1. Application de la méthode de la variation des constantes arbitraires à l'intégration des équations du mouvement d'un point dans un plan 27
2. Influence de la résistance d'un milieu sur le mouvement d'un point attiré par un centre fixe en raison de la distance..... 30
3. Emploi des coordonnées elliptiques dans l'intégration de quelques problèmes relatifs au mouvement d'un point dans un plan..... 37

CHAPITRE II.

MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL SUR UNE COURBE FIXE.

§ I. — *Questions diverses.*

4. Théorème de Salladini 42
5. Théorème de M. O. Bonnet..... 43
6. Courbes synchrones. — Cas de la cycloïde 46
7. Développement de la formule du pendule simple, d'après Despeyrous..... 49

§ II. — *Des tautochrones.*

8. Propriétés générales..... 52
9. Cas de la pesanteur..... 55
10. Cas d'une attraction par un centre fixe en raison de la distance.. 56
11. Tautochrone dans un milieu résistant..... 58

§ III. — *Des brachistochrones.*

12. Formules générales..... 60
13. Brachistochrone, lorsque le mobile n'est pas assujetti à rester sur une surface. — Théorèmes d'Euler et de M. Bertrand..... 62
14. Le point est assujetti à rester sur une surface. — Théorèmes de M. Bertrand et de Gauss 68
15. Brachistochrone dans le cas d'un point pesant qui n'est pas assujetti à rester sur une surface..... 71

N°s Pages
16. Même problème, dans le cas d'une force centrale fonction de la distance 72
17. Brachistochrone dans le cas où un point pesant est assujetti à rester sur une surface de révolution dont l'axe est vertical 73

CHAPITRE III.

DU MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL SUR UNE SURFACE.

18. Équation complémentaire en coordonnées curvilignes 75
19. Lignes géodésiques de l'ellipsoïde. — Théorèmes de Joachimstahl et de Gudermann 78
20. Propriété des lignes géodésiques d'une surface de révolution. — Extension du théorème de Gudermann 81
21. Équations en coordonnées cylindriques du mouvement d'un point sur une snrface 84
22. Mouvement d'un point sur une surface de révolution 87
23. Mouvement sur un hélicoïde gauche d'un point soumis à l'action d'une force proportionnelle à la distance à l'axe 88
24. Développements en séries des formules du pendule conique 89
25. Influence de la résistance de l'air sur le mouvement de ce pendule 97

CHAPITRE IV.

DYNAMIQUE ANALYTIQUE.

26. Équations générales de la Dynamique 98
27. Équations du mouvement d'un système à liaisons 100
28. Théorème d'Hamilton 102
29. Équations de Lagrange 103
30. Formules d'Hamilton 104
31. Équations du mouvement d'un système en coordonnées sphériques 106
32. Équations du mouvement d'un point en coordonnées curvilignes orthogonales 107
33. Application des formules de Lagrange 115
34. Principe de la moindre action 118
35. Stabilité de l'équilibre 122
36. Petits mouvements d'un système 125

CHAPITRE V.

SUR LA STATIQUE DES CORPS SOLIDES ET LES COURBES FUNICULAIRES.

§ I. — *Attraction d'un ellipsoïde homogène sur un point.*

37. Conventions 130
38. Théorèmes de Gauss sur l'attraction 131

Nos Pages
39. Expression de l'aire élémentaire d'une surface en coordonnées quelconques 134
40. Attraction d'un ellipsoïde sur un point 137
41. Composantes de l'attraction d'un ellipsoïde sur un point extérieur 141
42. Cas d'un ellipsoïde de révolution aplati 142
43. Cas d'un ellipsoïde de révolution allongé 144
44. Attraction d'un cylindre indéfini sur un point de sa surface 144
45. Solide homogène de plus grande attraction sur un point extérieur 145

§ II. — *Courbes funiculaires.*

46. Formules générales 149
47. Cas où les forces élémentaires sont parallèles à une même direction 151
49. De la chaînette 151
48. Fil sollicité par des forces verticales proportionnelles aux projections horizontales des arcs élémentaires 153
50. Forme d'équilibre d'un fil dont les éléments sont sollicités par des forces fonctions de la distance à un axe fixe 157
51. Fil d'égale résistance 159
52. Mouvement d'un fil 161

§ III. — *Questions diverses.*

53. Centre de gravité d'un tronc de prisme droit triangulaire 163
54. Théorème de Sluze 166
55. Théorème de Pappus 168
56. Sur le moment d'inertie d'un solide de révolution 168
57. Du frottement dans la vis à filet triangulaire 169
58. De la vrille 173

CHAPITRE VI.

MOUVEMENT D'UN SOLIDE AUTOUR D'UN POINT FIXE.

§ I. — *Le corps n'est sollicité par aucune force extérieure.*

59. Préliminaires 178
60. De la polhodie 179
61. Équation différentielle de l'herpolhodie 185
62. Rayon de courbure de cette courbe 188
63. Mode de génération de l'herpolhodie 191
64. Théorème de Chasles 195

§ II. — *Du mouvement d'une toupie sur un plan mobile.*

65. Formules de Poisson 195

CHAPITRE VII.

DU CHOC DES CORPS SOLIDES.

Nos Pages
66. Généralités 204
67. Théorème de Carnot 205
68. Demi-accroissement de la force vive après le choc 207
69. Mouvement que prennent deux corps choquants libres après le choc 208
70. Du choc de deux corps dont l'un est libre et l'autre est assujetti à tourner autour d'un axe fixe 214

CHAPITRE VIII.

HYDRODYNAMIQUE.

§ I. — *Développements sur quelques questions.*

71. Démonstration du théorème de Lagrange sur la fonction des vitesses 218
72. Mouvement permanent d'un liquide pesant contenu dans un vase dont la paroi est de révolution autour d'un axe vertical 223
73. Équations du mouvement d'un liquide en coordonnées curvilignes orthogonales 227
74. Mouvement d'un solide pesant dans un liquide pesant 232

§ II. — *Des ondes liquides.*

75. Équations générales 249
76. Mouvement du liquide lorsqu'il est contenu dans un canal indéfini 252
77. Le niveau est indéfini en tous sens 268

APPENDICE.

CINÉMATIQUE.

CHAPITRE I.

DE LA VITESSE D'UN POINT.

1. Sur la composition des vitesses 287
2. Construction de la tangente à quelques courbes 288

CHAPITRE II.

DU MOUVEMENT GÉOMÉTRIQUE DES SYSTÈMES INVARIABLES.

N°s Pages

3. Application à la Géométrie de la théorie du mouvement d'une figure plane dans son plan 293
4. Sur l'axe instantané de rotation et de glissement 294
5. Roulement de deux corps solides l'un sur l'autre 296
6. Sur le planimètre d'Amsler 301
7. Sur les systèmes articulés ayant pour objet le tracé d'une droite et d'un arc de cercle (de Peaucellier, Kempe, Hart) 304
8. Engrenage elliptique 314
9. Engrenage logarithmique 317
10. Joint Clemens 319

CHAPITRE III.

DE L'ACCÉLÉRATION D'UN POINT.

11. Accélération d'un point lorsque sa direction est constante 323
12. Accélération centrale 323
13. Rayon de courbure de la parabole 324
14. Rayon de courbure de l'ellipse 325
15. Propriétés de la cycloïde 328
16. Rayon de courbure de l'hélice 331

CHAPITRE IV.

DE L'ACCÉLÉRATION D'UN POINT D'UN SYSTÈME INVARIABLE.

§ I. — *Mouvement d'une figure plane dans son plan.*

17. Généralités 332
18. Détermination du centre géométrique des accélérations dans quelques cas spéciaux 332
19. Sur les propriétés d'une courbe qui roule sur une droite 336

§ II. — *Accélération d'un point d'un système invariable dans le cas le plus général.*

20. Expression de l'accélération 342
21. Composantes normale et tangentielle 346
22. Direction de la normale principale 346
23. Plan osculateur 347
24. Lieu des points dont l'accélération normale est nulle 347
25. Lieu des points dont l'accélération tangentielle est nulle 348
26. Examen d'un cas spécial 348

CHAPITRE V.

DU MOUVEMENT RELATIF D'UN POINT PAR RAPPORT A UN SYSTÈME INVARIABLE.

N°s Pages
27. Théorème de Coriolis..... 350
28. Forme particulière sous laquelle on peut mettre les équations du mouvement relatif d'un point..... 354
29. Application à la détermination de la courbure de quelques courbes susceptibles d'une définition géométrique..... 354
30. Courbure d'une surface..... 356
31. Courbe de l'enveloppe d'une courbe plane..... 360
32. Tangente et courbure en un point du lieu des centres de courbure d'une courbe (σ) qui roule sur une autre courbe (σ').... 362
Note sur l'extension des équations de Lagrange au mouvement relatif. 364

CHAPITRE VI.

DE L'ACCÉLÉRATION DU SECOND ORDRE.

§ I. — *Accélération du second ordre d'un point.*

33. Généralités..... 374
34. Détermination du rayon de courbure de la développée de quelques courbes planes..... 377
35. Rayon de torsion de l'hélice..... 378

§ II. — *Accélération du second ordre dans le mouvement d'une figure plane dans un plan.*

36. Propriétés générales..... 379
37. Détermination du centre des accélérations du second ordre dans quelques cas particuliers..... 382
Note I : sur un théorème de Binet relatif aux moments d'inertie.... 384
Note II : sur le choc de deux corps libres..... 386

FAUTES ESSENTIELLES A CORRIGER.

Pages.	Lignes.	Au lieu de :	Lire :
104	9	$\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial u'} dt$	$\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial u'} \delta u \, dt$
»	»	$\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial u'} \delta u$	$\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial u'} \delta u \, dt$
107	7 en remontant	$\sin\theta \frac{d\varphi}{dt}$	$\sin^2\theta \frac{d\varphi}{dt}$
»	»	$\frac{g}{l} \sin\theta$	$-\frac{g}{l} \sin$
111	5 en remontant	$\rho^2 d\rho_2$	$\rho_2 d\rho$
144	9	λ^2	$\frac{\lambda^2}{2}$
»	14	9,8249	9,8337
»	»	$0{,}0371 \cos^2 l$	$0{,}0404 \cos^2 l$

TRAITÉ

DE

MÉCANIQUE GÉNÉRALE.

HUITIÈME PARTIE.

DÉVELOPPEMENTS SUR LA MÉCANIQUE RATIONNELLE ET LA CINÉMATIQUE PURE.

INTRODUCTION.

I.

Méthode des variations. — Préliminaires.

1. Soient

$$u = f(x)$$

une fonction de x [nous considérerons u comme l'ordonnée d'une courbe dont x serait l'abscisse (*fig.* 1)]; m_0, m_1 deux points de cette courbe, ayant respectivement pour coordonnées

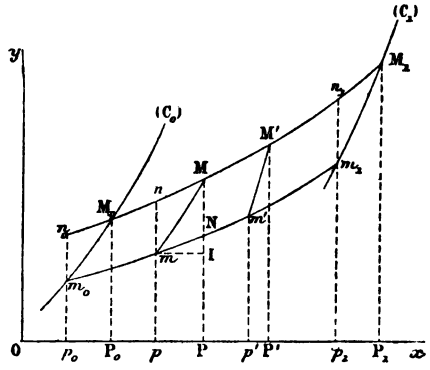
$$Op_0 = x_0, \qquad m_0p_0 = u_0 \qquad \text{et} \qquad Op_1 = x_1, \qquad m_1p_1 = u_1.$$

Supposons que les points m_0, m_1 se trouvent respectivement sur deux courbes données (C_0), (C_1) et que M_0, M_1 soient deux points de ces courbes infiniment voisins de m_0, m_1. Faisons passer par M_0 et M_1 un arc de courbe dont l'ordonnée $U = F(x)$ diffère infiniment peu de celle u de l'arc m_0m_1.

Soient $Op = x$, $mp = u$ les coordonnées d'un point quelconque m de l'arc m_0m_1; $OP = x + \delta x$, $MP = u + \delta u$ celles

d'un point M de l'autre arc, en désignant par δx une fonction arbitraire de x, mais qui conserve une valeur infiniment petite entre les limites x_0, x_1 de x. La *variation* δu de u sera aussi infiniment petite.

Fig. 1.



Soient encore n, N les intersections de mp, MP avec les arcs M_0M_1 et m_0m_1; I la projection de m sur MP;

$$(1) \qquad \omega = \overline{mn} = F(x) - f(x).$$

Nous avons

$$\overline{MN} = F(x + \delta x) - f(x + \delta x) = F(x) - f(x) + [F'(x) - f'(x)]\,\delta x.$$

Comme $F'(x) - f'(x)$ est de l'ordre des variations δx et δu, nous aurons, aux termes du second ordre près,

$$\overline{MN} = \omega.$$

La relation

$$\overline{MI} = \overline{MN} + \overline{NI} = \omega + \frac{du}{dx}\,\delta x$$

revient à

$$(2) \qquad \delta u = \omega + \frac{du}{dx}\,\delta x.$$

De l'égalité (1) on déduit

$$F^n(x) - f^n(x) = \frac{d^n\omega}{dx^n};$$

d'où

$$F^n(x+\delta x)-f^n(x)=F^n(x)-f^n(x)+F^{n+1}(x)\,\delta x$$
$$=\frac{d^n\omega}{dx^n}+F^{n+1}(x)\,\delta x,$$

ou, en remarquant que $F^{n+1}(x)$ ne diffère de $f^{n+1}(x)=\dfrac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}}$ que d'un infiniment petit,

$$\delta\frac{d^n u}{dx^n}=\frac{d^n\omega}{dx^n}+\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}}\,\delta x. \tag{3}$$

Si (C_0), (C_1) se réduisent à des perpendiculaires à Ox, on peut prendre $\delta x=0$; par suite, en vertu de la formule (2), $\omega=\delta u$, et l'on a simplement

$$\delta\frac{d^n u}{dx^n}=\frac{d^n\delta u}{dx^n}, \tag{3'}$$

et, dans ce cas, le signe δ peut passer sous le signe d.

Si l'on pose $\delta x=\varphi(x)$, on a

$$\delta(x+dx)=\varphi(x)+\varphi'(x)\,dx=\delta x+d\,\delta x$$

ou

$$\delta\,dx=d\,\delta x. \tag{4}$$

La considération géométrique suivante jettera quelque clarté sur la signification de ce dernier résultat. Soient m' le point de m_0m_1 dont l'abscisse est $Op'=x+dx$; M' son correspondant de M_0M_1 ayant OP' pour abscisse; on a

$$\overline{OP'}=\overline{Op'}+\delta\overline{Op'}=x+dx+\delta x+\delta\,dx,$$
$$\overline{OP'}=\overline{OP}+d\overline{OP}=x+\delta x+dx+d\,\delta x,$$

et, en identifiant, on retombe sur la formule (4).

2. *Variation de l'intégrale* $\int_{x_0}^{x_1}u\,dx$. — Cette variation pour expression

$$\delta\int_{x_0}^{x_1}u\,dx=\text{aire}\,P_0M_0M_1P_1-\text{aire}\,p_0m_0m_1p_1$$
$$=\text{aire}\,p_1n_1M_1P_1-\text{aire}\,p_0n_0M_0P_0+\text{aire}\,m_0n_0n_1m_1$$
$$=u_1\,\delta x_1-u_0\,\delta x_0+\int_{x_0}^{x_1}\omega\,dx$$

ou, en ayant égard à la formule (2),

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} u\,dx = u_1\,\delta x_1 - u_0\,\delta x_0 + \int_{x_0}^{x_1} (\delta u\,dx - \delta x\,du);$$

une intégration par partie donnant

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_1} \delta(u\,dx) &= \int_{x_0}^{x_1} (\delta u\,dx + u\,d\delta x)\\ &= u_1\,\delta x_1 - u_0\,\delta x_0 + \int_{x_0}^{x_1} (\delta u\,dx - \delta x\,du),\end{aligned}$$

on a, sans restriction, que les limites x_0, x_1 soient constantes ou variables,

$$(5) \qquad \delta \int_{x_0}^{x_1} u\,dx = \int_{x_0}^{x_1} \delta(u\,dx).$$

3. *Expression de la variation de l'intégrale*

$$\int_{x_0}^{x_1} \Theta(x, y, y', y'', \ldots)\,dx,$$

dans laquelle Θ *est une fonction donnée de* x, *d'une fonction quelconque* y *de* x *et de ses dérivées successives* y', y'', ... — Nous avons, après une intégration par partie,

$$(\mathrm{A}) \qquad \left\{\begin{aligned}\delta \int_{x_0}^{x_1} \Theta\,dx &= \int_{x_0}^{x_1} \delta(\Theta\,dx) = \int_{x_0}^{x_1} (\delta\Theta\,dx + \Theta\,d\delta x)\\ &= (\Theta\,\delta x)_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} (\delta\Theta\,dx - \delta x\,d\Theta).\end{aligned}\right.$$

En adoptant la caractéristique ∂ pour les différentielles partielles et réservant la caractéristique d pour les différentielles totales, nous poserons

$$\frac{\partial\Theta}{\partial x} = \mathrm{L}, \qquad \frac{\partial\Theta}{\partial y} = \mathrm{M}, \qquad \frac{\partial\Theta}{\partial y'} = \mathrm{M}', \qquad \frac{\partial\Theta}{\partial y''} = \mathrm{M}'', \qquad \ldots,$$

et nous aurons

$$\begin{aligned}\delta\Theta &= \mathrm{L}\,\delta x + \mathrm{M}\,\delta y + \mathrm{M}'\,\delta y' + \ldots,\\ d\Theta &= \mathrm{L}\,dx + \mathrm{M}\,dy + \mathrm{M}'\,dy' + \ldots,\end{aligned}$$

en portant ces valeurs dans la formule (A), nous obtien-

drons

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} \Theta\, dx = (\Theta\, \delta x)_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} [\mathrm{M}(\delta y\, dx - \delta x\, dy) + \mathrm{M}'(\delta y'\, dx - \delta x\, dy') + \ldots].$$

Si l'on substitue les valeurs suivantes, qui résultent de l'application des formules (2) et (3),

$$\delta y = \omega + \frac{dy}{dx}\delta x,$$

$$\delta y' = \frac{d\omega}{dx} + \frac{dy'}{dx}\delta x,$$

$$\delta y'' = \frac{d^2\omega}{dx^2} + \frac{dy''}{dx}\delta x,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

il vient

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} \Theta\, dx = (\Theta\, \delta x)_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \left(\mathrm{M}\omega + \mathrm{M}'\frac{d\omega}{dx} + \mathrm{M}''\frac{d^2\omega}{dx^2} + \ldots\right) dx.$$

En intégrant par partie, on obtient

$$\int \mathrm{M}'\frac{d\omega}{dx}\, dx = \mathrm{M}'\omega - \int \omega \frac{d\mathrm{M}'}{dx}\, dx,$$

$$\int \mathrm{M}''\frac{d^2\omega}{dx^2}\, dx = \mathrm{M}''\frac{d\omega}{dx} - \int \frac{d\omega}{dx}\frac{d\mathrm{M}''}{dx}\, dx$$

$$= \mathrm{M}''\frac{d\omega}{dx} - \omega\frac{d\mathrm{M}''}{dx} + \int \omega \frac{d^2\mathrm{M}''}{dx^2}\, dx,$$

$$\int \mathrm{M}'''\frac{d^3\omega}{dx^3}\, dx = \mathrm{M}'''\frac{d^2\omega}{dx^2} - \frac{d\omega}{dx}\frac{d\mathrm{M}'''}{dx} + \omega\frac{d^2\mathrm{M}'''}{dx^2} - \int \omega \frac{d^3\mathrm{M}'''}{dx^3}\, dx,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et, si l'on pose

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} \gamma_1 &= \left(\mathrm{M}' - \frac{d\mathrm{M}''}{dx} + \frac{d^2\mathrm{M}'''}{dx^2} - \ldots\right)\omega \\ &\quad + \left(\mathrm{M}'' - \frac{d\mathrm{M}'''}{dx} + \frac{d^2\mathrm{M}^{\mathrm{IV}}}{dx^2} - \ldots\right)\frac{d\omega}{dx} + \ldots \\ &= \left(\mathrm{M}' - \frac{d\mathrm{M}''}{dx} + \frac{d^2\mathrm{M}'''}{dx^2} - \ldots\right)(\delta y - y'\delta x) \\ &\quad + \left(\mathrm{M}'' - \frac{d\mathrm{M}'''}{dx} + \frac{d^2\mathrm{M}^{\mathrm{IV}}}{dx^2} - \ldots\right)(\delta y' - y''\delta x) + \ldots. \end{aligned}\right.$$

$$(7)\qquad \mathrm{Y} = \mathrm{M} - \frac{d\mathrm{M}'}{dx} + \frac{d^2\mathrm{M}''}{dx^2} - \ldots,$$

on a

$$(8)\qquad \delta\int_{x_0}^{x_1}\Theta\,dx=(\Theta\,\delta x+\eta)_{x_0}^{x_1}+\int_{x_0}^{x_1}\omega\,\mathrm{Y}\,dx,$$

4. Supposons que Θ renferme, en même temps que y, une autre fonction z de x, ainsi que ses dérivées, et posons

$$\varphi=\delta z-z'\delta x,$$

$$\frac{\partial\Theta}{\partial z}=\mathrm{N},\qquad \frac{\partial\Theta}{\partial z'}=\mathrm{N}',\qquad \frac{\partial\Theta}{\partial z''}=\mathrm{N}'',\qquad \ldots,$$

et, de plus,

$$(6')\qquad \left\{\begin{aligned}\zeta=&\left(\mathrm{N}'-\frac{d\mathrm{N}''}{dx}+\frac{d^2\mathrm{N}'''}{dx^2}-\ldots\right)(\delta z-z'\delta x)\\&+\left(\mathrm{N}''-\frac{d\mathrm{N}'''}{dx}+\frac{d^2\mathrm{N}^{\mathrm{IV}}}{dx^2}-\ldots\right)(\delta z'-z''\delta x)+\ldots,\end{aligned}\right.$$

$$(7')\qquad \mathrm{Z}=\mathrm{N}-\frac{d\mathrm{N}'}{dx}+\frac{d^2\mathrm{N}''}{dx^2}-\ldots.$$

La variation de l'intégrale, lorsque l'on fera varier simultanément y et z, sera

$$(8')\qquad \delta\int_{x_0}^{x_1}\Theta\,dx=(\Theta\,\delta x+\eta+\zeta)_{x_0}^{x_1}+\int_{x_0}^{x_1}(\omega\,\mathrm{Y}+\varphi\,\mathrm{Z})\,dx.$$

5. Admettons actuellement que Θ renferme non seulement les fonctions y et z et leurs dérivées, mais encore les valeurs de ces quantités qui se rapportent aux limites. Nous avons

$$\begin{aligned}\delta\Theta=&(\mathrm{L}\,\delta x+\mathrm{M}\,\delta y+\mathrm{M}'\delta y'+\ldots+\mathrm{N}\,\delta z+\mathrm{N}'\delta z'+\ldots)\\&+\frac{\partial\Theta}{\partial x_0}\delta x_0+\frac{\partial\Theta}{\partial x_1}\delta x_1\\&+\frac{\partial\Theta}{\partial y_0}\delta y_0+\frac{\partial\Theta}{\partial y'_0}\delta y'_0+\ldots+\frac{\partial\Theta}{\partial y_1}\delta y_1+\frac{\partial\Theta}{\partial y'_1}\delta y'_1+\ldots\\&+\frac{\partial\Theta}{\partial z_0}\delta z_0+\frac{\partial\Theta}{\partial z'_0}\delta z'_0+\ldots+\frac{\partial\Theta}{\partial z_1}\delta z_1+\frac{\partial\Theta}{\partial z'_1}\delta z'_1+\ldots.\end{aligned}$$

En substituant cette valeur dans la formule (A), la partie

entre parenthèses donnera la valeur (8′), à laquelle on devra ajouter

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned}\varpi = {} & \delta x_0 \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial\Theta}{\partial x_0}\,dx + \delta x_1 \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial\Theta}{\partial x_1}\,dx \\ & + \delta y_0 \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial\Theta}{\partial y_0}\,dx + \delta y'_0 \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial\Theta}{\partial y'_0}\,dx + \ldots \\ & + \delta y_1 \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial\Theta}{\partial y_1}\,dx + \delta y'_1 \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial\Theta}{\partial y'_1}\,dx + \ldots \\ & + \delta z_0 \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial\Theta}{\partial z_0}\,dx + \delta z'_0 \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial\Theta}{\partial z'_0}\,dx + \ldots \\ & + \partial z_1 \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial\Theta}{\partial z_1}\,dx + \delta z'_1 \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial\Theta}{\partial z'_1}\,dx + \ldots.\end{aligned}\right.$$

On aura donc, pour la variation totale de l'intégrale,

$$(8'')\quad \delta \int_{x_0}^{x_1} \Theta\,dx = (\Theta\,\delta x + \eta + \zeta)_{x_0}^{x_1} + \varpi + \int_{x_0}^{x_1} (\omega Y + \varphi Z)\,dx.$$

Des maxima et minima.

6. Pour que les fonctions y et z, considérées comme indéterminées, rendent maximum ou minimum l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x_1} \Theta\,dx,$$

il faut que sa variation soit nulle. Pour savoir s'il y a maximum ou minimum, il faudrait s'assurer que la somme des termes du second ordre de cette variation, qui n'a pas été calculée, est négative ou positive. Mais cela n'est pas généralement nécessaire, car on voit presque toujours *a priori* si un problème comporte un maximum ou un minimum.

7. Supposons d'abord que Θ ne renferme qu'une seule fonction inconnue y, sans comprendre les quantités relatives aux limites, ou que l'on ait à appliquer la formule (8).

Si l'on donne des valeurs déterminées aux coordonnées et aux variations qui se rapportent aux limites, le premier terme de l'expression (8) prendra aussi une valeur déterminée;

mais, dans le second terme, il entre sous le signe $\int$ le facteur arbitraire ω, et la variation de l'intégrale ne pourrait être nulle, quel que soit ω. Il faut donc qu'on ait séparément

$$(\theta\,\delta x + \eta)_{x_0}^{x_1} = 0, \tag{10}$$

$$Y = 0. \tag{11}$$

En admettant qu'on puisse intégrer l'équation (11), on exprimera y_0, y'_0, ..., y_1, y'_1, ... au moyen des constantes introduites par l'intégration et des abscisses x_0, x_1. On portera ces valeurs dans l'équation (10). Les relations données par la nature du problème entre les y, y', ... relatifs aux limites permettront d'éliminer autant d'inconnues et de variations dans l'équation ci-dessus, et en égalant à zéro les coefficients des variations restantes, puisqu'elles restent arbitraires, on obtiendra des équations qui permettront de déterminer les inconnues restantes, par suite les autres inconnues, au moyen des relations données. Ces généralités seront éclaircies par les applications que nous ferons plus loin.

8. Dans le cas plus général où s'applique la formule (8″), on devra avoir, en raisonnant comme ci-dessus,

$$(\theta\,\delta x + \eta + \zeta)_{x_0}^{x_1} + \varpi = 0, \tag{10'}$$

$$\omega Y + \varphi Z = 0. \tag{11'}$$

Si les fonctions y et z sont indépendantes, on devra avoir

$$Y = 0, \qquad Z = 0, \tag{11''}$$

soit deux équations différentielles que l'on aura à intégrer.

Admettons maintenant que nous ayons entre x, y et z une relation donnée de la forme

$$F(x, y, z) = 0;$$

les coefficients ω et φ ne seront plus indépendants, et l'un d'eux seul restera arbitraire. Nous avons

$$\frac{\partial F}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial F}{\partial z}\,\delta z = 0$$

ou

$$\frac{\partial F}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\left(\omega + \frac{dy}{dx}\,\delta x\right) + \frac{\partial F}{\partial z}\left(\varphi + \frac{\partial z}{\partial x}\,\delta x\right) = 0$$

Comme nous avons aussi

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dx} = 0,$$

il vient

$$\frac{\partial F}{\partial y}\omega + \frac{\partial F}{\partial z}\varphi = 0.$$

En éliminant φ entre cette dernière équation et l'équation (11'), puis égalant à zéro le coefficient de ω, on trouve, pour l'équation différentielle que l'on aura à intégrer,

$$(11''') \qquad \frac{Y}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{Z}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

9. *Maxima et minima relatifs.* — Supposons que Θ ne renferme, en dehors de x, que y et ses dérivées, et que l'on veuille rendre

$$(\alpha) \qquad \int_{x_0}^{x_1} \Theta\, dx$$

maximum ou minimum en s'imposant la condition

$$(\alpha') \qquad \int_{x_0}^{x_1} \Psi\, dx = a.$$

dans laquelle Ψ est une fonction donnée de même nature que Θ et a une constante également donnée.

Nous avons d'abord

$$(\beta) \qquad (\Theta\, \delta x + \eta)_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \omega Y\, dx = 0.$$

Comme la variation de l'intégrale (α') est nulle, nous avons aussi une équation de la forme

$$(\beta') \qquad (\Psi\, \delta x + \chi)_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \omega U\, dx = 0,$$

dans laquelle χ et U sont pour Ψ les équivalents de η et Y pour Θ. Si nous posons

$$(\gamma) \qquad \int_{x_0}^{x} \omega U\, dx = f(x),$$

nous aurons $f(x_0) = 0$, et l'équation (β') deviendra

$$(\delta) \qquad (\Psi\,\delta x + \chi)_{x_0}^{x_1} + f(x_1) = 0.$$

On déduit de l'équation (γ)

$$\omega = \frac{f'(x)}{U};$$

en portant cette valeur dans la formule (β), on obtient

$$(\Theta\,\delta x + \eta)_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \frac{Y}{U} f'(x)\,dx = 0$$

ou, en intégrant par partie,

$$(\Theta\,\delta x + \eta)_{x_0}^{x_1} + \left[\frac{Y}{U} f(x)\right]^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{Y}{U}\right)' f(x)\,dx = 0.$$

Comme $f(x)$ est arbitraire, il faut que l'on ait séparément

$$(\Theta\,\delta x + \eta)_{x_0}^{x_1} + \left[\frac{Y}{U} f(x)\right]^{x_1} = 0,$$

$$\left(\frac{Y}{U}\right)' = 0.$$

En désignant par m une constante, la seconde de ces équations donne

$$(a) \qquad Y - mU = 0,$$

et la première devient

$$f(x_1) = -\frac{1}{m}(\Theta\,\delta x + \eta)_{x_0}^{x_1}.$$

Si l'on porte cette valeur dans la formule (δ), on obtient

$$(b) \qquad [(\Theta - m\Psi)\,\delta x + \eta - m\chi]_{x_0}^{x_1} = 0.$$

Les équations (a) et (b) ne sont autre chose que celles qui expriment que

$$\int_{x_0}^{x_1} (\Theta - m\Psi)\,dx$$

est maximum ou minimum, et l'on rentre dans le cas ordinaire.

Si m vient s'ajouter au nombre des inconnues, nous avons aussi de plus la condition (α'), et la question peut, par suite, être considérée comme résolue.

10. *Abaissement de l'ordre de l'équation différentielle dans quelques cas spéciaux lorsque la fonction* Θ *ne renferme que* y *et ses dérivées.* — Si $y, y', \ldots, y^i$ n'entrent pas dans Θ, l'équation $Y = 0$ peut s'intégrer successivement $i+1$ fois, et son ordre sera abaissé de $i+1$ unités.

Supposons maintenant que Θ ne renferme pas x implicitement. Nous avons

$$(c) \qquad \frac{d\Theta}{dx} = My' + M'y'' + \ldots,$$

$$(d) \qquad Y = 0 = M - \frac{dM'}{dx} + \frac{d^2M''}{dx^2} - \ldots.$$

d'où, par l'élimination de M,

$$\frac{d\Theta}{dx} = M'\frac{dy'}{dx} + \frac{dM'}{dx}y' + M''\frac{d^2y'}{dx^2} - \frac{d^2M''}{dx^2}y' + \ldots,$$

et, en intégrant,

$$\begin{aligned}\Theta + \text{const.} &= M'y' + \int\left(M''\frac{d^2y'}{dx^2} - \frac{d^2M''}{dx^2}y'\right)dx \\ &\quad + \int\left(M'''\frac{d^3y'}{dx^3} + \frac{d^3M'''}{dx^3}y'\right)dx + \ldots \\ &= M'y' + M''\frac{dy'}{dx} - \frac{dM''}{dx}y' \\ &\quad + \int\left(M'''\frac{d^3y'}{dx^3} + \frac{d^3M'''}{dx^3}y'\right)dx + \ldots\end{aligned}$$

Si l'on intègre par partie, on a

$$\begin{aligned}\int M'''\frac{d^3y'}{dx^3}dx &= M'''\frac{d^2y'}{dx^2} - \int\frac{dM'''}{dx}\frac{d^2y'}{dx^2}dx \\ &= M'''\frac{d^2y'}{dx^2} - \frac{dM'''}{dx}\frac{dy'}{dx} + \int\frac{d^2M'''}{dx^2}\frac{dy'}{dx}dx \\ &= M'''\frac{d^2y'}{dx^2} - \frac{dM'''}{dx}\frac{dy'}{dx} + \frac{d^2M'''}{dx^2}y' - \int\frac{d^3M'''}{dx^3}y', \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Par suite,

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} \Theta + \text{const.} = &\left(M' - \frac{dM''}{dx} + \frac{d^2M'''}{dx^2} - \ldots\right)y' \\ &+ \left(M'' - \frac{dM'''}{dx} + \frac{d^2M^{\text{IV}}}{dx^2} - \ldots\right)y'' + \ldots, \end{aligned}\right.$$

et l'on est ramené à intégrer une équation d'un ordre inférieur d'une unité à celui de l'équation $Y = 0$.

Si, dans leur ordre de succession, $y, y', y'', \ldots, y^i$ ne figurent pas dans la fonction Θ, on réduira par des intégrations successives de $i+1$ unités l'ordre de l'équation différentielle $Y = 0$, puis on éliminera entre l'intégrale obtenue et l'équation (c) la dérivée partielle M^i, et une nouvelle intégration pourra s'effectuer.

Supposons, par exemple, que Θ ne renferme que y' et y'', les équations (c) et (d) deviennent, en désignant par C une constante,

$$\frac{d\Theta}{dx} = M'y'' + M''y''',$$

$$C = -M' + \frac{dM''}{dx};$$

d'où, par l'élimination de M',

$$\frac{d\Theta}{dx} + C\frac{dy'}{dx} = M''\frac{dy''}{dx} + \frac{dM''}{dx}y'',$$

et enfin

$$(12')\qquad \Theta + Cy' + C' = M''y'',$$

en désignant par C' une seconde constante.

11. *Cas particulier où la fonction Θ ne renferme que x, y, y'.* — L'équation $Y = 0$ se réduit à

$$(13)\qquad M - \frac{dM'}{dx} = 0.$$

Admettons qne Θ renferme aussi x_0 et x_1. Les formules (6) et (9) nous donnent

$$\eta = M'(\delta y - y'\,\delta x), \qquad \varpi = \delta x_0 \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial\Theta}{\partial x_0}\,dx + \delta x_1 \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial\Theta}{\partial x_1}\,dx.$$

D'ailleurs, l'ensemble des deux premiers termes de la formule (8″), où l'on fera $\zeta = 0$, doit être égalé à zéro, et l'on a, par suite,

$$[\Theta\,\delta x + M'(\delta y - y'\,\delta x)]_{x_0}^{x_1} + \delta x_1 \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial\Theta}{\partial x_1}\,dx + \delta x_0 \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial\Theta}{\partial x_0}\,dx = 0.$$

Si les variations relatives aux limites sont indépendantes, cette équation se dédouble dans les suivantes :

$$(14)\quad \begin{cases} [\Theta\,\delta x + M'(\delta y - y'\,\delta x)]_{x_1} + \delta x_1 \displaystyle\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial\Theta}{\partial x_1}\,dx = 0, \\ [\Theta\,\delta x + M'(\delta y - y'\,\delta x)]_{x_0} - \delta x_0 \displaystyle\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial\Theta}{\partial x_0}\,dx = 0. \end{cases}$$

Dans le cas où x n'entre pas implicitement dans la fonction Θ, l'équation (12), qu'il y a avantage à substituer à l'équation (13), devient

$$(15)\qquad \Theta = M'y' + \text{const.}$$

Si à y, et dans les mêmes conditions, vient s'adjoindre z dans la fonction Θ, on joindra à l'équation (13) la suivante,

$$(13')\qquad N - \frac{dN'}{dx} = 0,$$

et, si les limites sont indépendantes, les conditions (14) devront être remplacées par celles-ci :

$$(14')\quad \begin{cases} [\Theta\,\delta x + M'(\delta y - y'\,\delta x) + N'(\delta z - z'\,\delta x)]_{x_1} + \delta x_1 \displaystyle\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial\Theta}{\partial x_1}\,dx = 0, \\ [\Theta\,\delta x + M'(\delta y - y'\,\delta x) + N'(\delta z - z'\,\delta x)]_{x_0} - \delta x_0 \displaystyle\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial\Theta}{\partial x_0}\,dx = 0. \end{cases}$$

Applications à la Géométrie.

12. *Lignes de longueur minimum.* — Il s'agit de déterminer la plus courte distance d'un point à une courbe ou à une surface, d'une courbe à une autre courbe ou à une surface, d'une surface à une autre surface, enfin de deux courbes tracées sur une surface en restant sur cette surface.

On a, dans tous les cas,

$$a)\quad \begin{cases} \theta = \sqrt{1+y'^2+z'^2}, \qquad M = 0, \qquad N = 0, \\ M' = \dfrac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} = \dfrac{dy}{ds}, \qquad N' = \dfrac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} = \dfrac{dz}{ds}, \\ Y = -\dfrac{dM'}{dx}, \qquad Z = -\dfrac{dN'}{dz}. \end{cases}$$

Les équations (14′) se réduisent, pour chaque limite, à la suivante,

$$\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,\delta x + \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}(\delta y - y'\,\delta x) + \frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}(\delta z - z'\,\delta x) = 0,$$

ou, en réduisant,

$$(A)\qquad \delta x + y'\,\delta y + z'\,\delta z = 0.$$

Cette équation, mise sous la forme

$$\frac{\delta x}{\delta s}\frac{dx}{ds} + \frac{\delta y}{\delta s}\frac{dy}{ds} + \frac{\delta z}{\delta s}\frac{dz}{ds} = 0,$$

exprime que *la plus courte distance est normale à la courbe ou à la surface sur laquelle doit se trouver l'une ou l'autre de ses extrémités.*

1° *Plus courte distance dans l'espace.* — Les équations $Y = 0$, $Z = 0$ donnent

$$M' = \frac{dy}{ds} = \text{const.}, \qquad N' = \frac{dz}{ds} = \text{const.},$$

et la plus courte distance est une droite que nous représenterons par

$$(b)\qquad y = ax + b, \qquad z = a'x + b'.$$

Supposons que l'extrémité (x_0, y_0, z_0) doive se trouver sur une courbe; nous aurons des relations de la forme

$$y_0 = f_0(x_0), \qquad z_0 = \varphi_0(x_0),$$

d'où

$$\delta y_0 = f_0'(x_0)\,\delta x_0, \qquad \delta z_0 = \varphi_0'(x_0)\,\delta x_0,$$

et l'équation (A) nous donnera, eu égard aux valeurs a et a' de y' et z',

$$(c_0) \qquad 1 + a f_0'(x_0) + a' \varphi_0'(x_0) = 0.$$

Si l'autre extrémité (x_1, y_1, z_1) se trouve sur une autre courbe, nous aurons aussi une relation de la forme

$$(c_1) \qquad 1 + a f_1'(x_1) + a' \varphi_1'(x_1) = 0$$

et les équations (c_0) et (c_1), jointes aux suivantes,

$$f_0(x_0) - f_1(x_1) = a(x_0 - x_1),$$
$$\varphi_0(x_0) - \varphi_1(x_1) = a'(x_0 - x_1),$$

permettront de déterminer a, a', x_0, x_1, par suite y_0, z_0, y_1, z_1.

Supposons maintenant que le point (x_1, y_1, z_1) se trouve sur une surface

$$(d) \qquad z_1 = \Phi(x_1, y_1):$$

nous avons

$$\delta z_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} \delta y_1.$$

Si nous portons cette valeur dans la formule (A) après y avoir fait $y' = a$, $z' = a'$, nous trouvons

$$\left(1 + a' \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}\right) \delta x_1 + \left(a + a' \frac{\partial \Phi}{\partial y_1}\right) \delta y_1 = 0,$$

et, comme δx_1, δy_1 sont arbitraires, nous devons avoir

$$(e) \qquad 1 + a' \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = 0, \qquad a + a' \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} = 0;$$

nous avons d'ailleurs

$$(8) \qquad \begin{cases} f_1(x_0) - y_1 = a(x_0 - x_1), \\ \varphi_0(x_0) - \Phi(x_1, y_1) = a'(x_0 - x_1), \end{cases}$$

et les équations (c_0), (e), (f) permettront de déterminer les inconnues x_0, x_1, y_1, a, a'.

Le problème se résoudrait de la même manière si le point (x_0, y_0, z_0) devait se trouver sur une surface.

2° *Plus courte distance sur une surface.* — Soient

$$F(x, y, z) = 0$$

l'équation de la surface;

$\left.\begin{matrix}\alpha, \beta, \gamma \\ \lambda, \mu, \nu \\ l, m, n\end{matrix}\right\}$ les angles formés avec Ox, Oy, Oz par $\left\{\begin{matrix}\text{la tangente à la courbe;} \\ \text{la normale principale à cette courbe;} \\ \text{la normale;}\end{matrix}\right.$

ε l'angle de contingence.

L'équation (11''') du n° 8, qui reçoit ici son application, devient, en ayant égard aux valeurs ci-dessus de Y et Z,

$$\frac{dM'}{\cos m} = \frac{dN'}{\cos l}.$$

Mais on a trouvé plus haut

$$M' = \cos\beta, \qquad N' = \cos\gamma;$$

d'où

$$dM' = d\cos\beta = \varepsilon\cos\mu, \qquad dN' = d\cos\gamma = \varepsilon\cos\nu,$$

par suite

$$\frac{\cos\mu}{\cos m} = \frac{\cos\nu}{\cos n}.$$

En désignant par k ce rapport, on a

$$\cos\mu = k\cos m, \qquad \cos\nu = k\cos n,$$

ou

$$\cos\mu\cos\beta = k\cos m\cos\beta, \qquad \cos\nu\cos\gamma = k\cos n\cos\gamma,$$

et comme

$$\cos\mu\cos\beta + \cos\nu\cos\gamma = -\cos\lambda\cos\alpha,$$
$$\cos m\cos\beta + \cos u\cos\gamma = -\cos l\cos\alpha,$$

il vient

$$\cos\lambda = k\cos l.$$

Il suit de là que $k = 1$, $\lambda = l$. Donc le plan osculateur est normal à la surface, ou la plus courte distance est une ligne géodésique.

L'équation (A) reçoit encore ici son application; d'où il suit que la plus courte distance de deux courbes tracées sur une surface est normale à ces courbes.

13. *Courbe plane qui, passant par deux points donnés m_0, m_1, engendre par sa révolution autour d'un axe compris dans son plan une surface minimum.* — Soient

$$y = f(x, y_2, x_2)$$

l'équation d'une courbe passant par les deux points donnés m_0, m_1 et par un point m_2 dont on peut faire varier les coordonnées x_2, y_2;

$$S = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} y\, dx$$

l'aire de la surface de révolution autour de Ox engendrée par la courbe. Si, x_2 restant constant, y_2 diminue de $+\infty$ à $-\infty$, l'intégrale ci-dessus variera entre ces limites; S décroîtra constamment de $+\infty$ à o, ou passera au moins par un minimum suivi d'un maximum. On ne considérera que le second de ces cas en remarquant que pour un minimum ou un maximum y_2 devient une fonction déterminée de x_2. En faisant varier x_2 entre x_0 et x_1, S prendra une valeur minimum $F(x_0, x_1)$ plus petite que toutes les autres, et il est clair que la courbe correspondante différera moins de la corde $m_0 m_1$ que celle qui se rapporte au maximum suivant. En faisant varier la forme de la courbe, le minimum F passera par un *minimum minimorum*, et c'est la forme correspondant à ce minimum qu'il s'agit de déterminer.

Nous devons donc rendre minimum l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

Nous poserons en conséquence

$$\Theta = y\sqrt{1 + y'^2},$$

$$M' = \frac{yy'}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

Comme Θ ne renferme pas x implicitement, nous appliquerons la formule (12) du n° 10 qui nous donnera

$$y \cos\alpha = C.$$

La courbe est donc une chaînette dont Ox est l'axe extérieur.

Proposons-nous de déterminer cette courbe dans le cas simple où les points m_0, m_1 se trouvent à la même distance y_1 de Ox. L'axe transverse Oy se trouvera à égale distance de m_0, m_1 et l'on aura

$$\frac{S}{4\pi} = \int_0^{x_1} y\,ds.$$

Soient a l'ordonnée inconnue du sommet, α_1 l'inclinaison sur Ox de la tangente en m_1; on a (t. I, p. 311)

$$y = a\sqrt{1 + \tang^2\alpha}, \qquad s = a \tang\alpha;$$

par suite

$$\frac{S}{4\pi} = a^2\left[\log\left(\tang\alpha_1 + \frac{1}{\cos\alpha_1}\right) + \frac{\tang\alpha_1}{\cos\alpha_1}\right].$$

Nous avons

$$y_1 = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x_1}{a}} + e^{-\frac{x_1}{a}}\right),$$

pour déterminer a, et la relation

$$\tang\alpha_1 = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x_1}{a}} - e^{-\frac{x_1}{a}}\right).$$

Si l'on pose

$$(1) \qquad a = \frac{x_1}{u},$$

on a

$$(2) \qquad \frac{S}{4\pi x_1^2} = \frac{1}{u^2}\left[\log\left(\tang\alpha_1 + \frac{1}{\cos\alpha_1}\right) + \frac{\tang\alpha_1}{\cos\alpha_1}\right],$$

$$(3) \qquad 2\frac{y_1}{x_1} = \frac{1}{u}(e^u + e^{-u}),$$

$$(4) \qquad \tang\alpha_1 = \frac{1}{2}(e^u - e^{-u}).$$

Les solutions de l'équation (3) seront les abscisses des intersections de la droite et de la chaînette auxiliaire respectivement représentées par les équations

$$(5) \qquad z = \frac{y_1}{x_1}u,$$

$$(6) \qquad z = \frac{1}{2}(e^u + e^{-u}).$$

Il y aura donc en général deux chaînettes passant par les points m_0, m_1. D'après ce qui a été dit plus haut, le minimum de S sera engendré par celle des deux chaînettes qui s'éloignera le moins de la droite $m_0 m_1$, c'est-à-dire dont l'ordonnée du sommet sera la plus grande, qui correspond à la plus petite des racines de l'équation (3); mais, pour que la droite (5) coupe la courbe (6), il faut que son coefficient angulaire soit au moins égal à celui de la tangente à la courbe menée par l'origine. L'équation de la tangente au point (z', u') de cette courbe est

$$z - \frac{1}{2}(e^{u'} + e^{-u'}) = \frac{1}{2}(e^{u} - e^{-u'})(u - u'),$$

et, en supposant $z = 0$, $u = 0$, on a

$$u'(e^{u'} - e^{-u'}) - (e^{u'} + e^{-u'}) = 0 \tag{7}$$

pour l'équation que fera connaître l'abscisse du point de contact de la tangente menée par l'origine. Cette équation a une racine comprise entre 1 et 2 et elle est unique. On reconnaît facilement qu'elle est même comprise entre 1,1 et 1,2 et qu'elle diffère peu de la seconde de ces limites. En appliquant la règle d'approximation de Newton, on trouve

$$u' = 1,1997;$$

il faut donc que

$$\frac{y_1}{x_1} \geqq \frac{1}{2}(e^{u'} - e^{-u'})$$

ou

$$\frac{y_1}{x_1} \geqq 1,5089.$$

Dans le cas de l'égalité, il n'y a pour S qu'un minimum, et les tangentes aux extrémités de l'arc de la chaînette passent par l'origine des coordonnées. Comme on a $\tang \alpha_1 = 1,5089$, il vient

$$\frac{S}{4\pi x_1^2} = 2,731.$$

Considérons maintenant le cas de $\frac{y_1}{x_1} = 3$; l'équation (3) devient

$$\frac{1}{u}(e^{u} + e^{-u}) - 6 = 0 \tag{8}$$

et a une première racine comprise entre o et 1, que nous allons d'abord calculer. En développant en série, on a

$$u = \frac{1}{6}(e^u + e^{-u}) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{u^2}{6} + \frac{u^4}{24} + \ldots\right).$$

On voit que la racine dont il s'agit est un peu supérieure à $\frac{1}{3}$ et, par des approximations successives, on trouve

$$u = 0,3544.$$

On a ensuite

$$\operatorname{tang}\alpha_1 = \frac{1}{2}(e^u - e^{-u}) = u\left(1 + \frac{u^2}{6} + \frac{u^4}{120} + \ldots\right) = 0,36184$$

et le minimum de S est donné par

$$\frac{S}{4\pi x_1^2} = 6,3045.$$

La plus grande racine de l'équation (8) est comprise entre 1 et 3 et ne doit pas différer beaucoup de la seconde de ces limites; on trouve qu'elle est un peu inférieure à 2,83 et que sa valeur est à très peu près

$$u = 2,8293,$$

d'où

$$\operatorname{tang}\alpha_1 = 8,4432.$$

Le maximum de S se déduira de la formule

$$\frac{S}{4\pi x_1^2} = 9,248.$$

Il paraîtrait résulter de ce qui précède que le plus petit des minima de S pour une valeur déterminée de $2x_1$ répondrait à la limite inférieure de $\frac{y_1}{x_1}$.

14. *Courbe plane, passant par deux points donnés où les directions des normales sont également données, qui détermine avec ces normales et sa développée une aire minimum.* — Soient ρ le rayon de courbure au point (x, y) et α l'inclinaison sur Ox de la tangente en ce point.

On a

$$\rho = \left(\frac{1+y'^2}{y''}\right)^{\frac{3}{2}}, \qquad d\alpha = \frac{y''}{1+y'^2}\,dx.$$

L'élément de l'aire étant

$$\frac{1}{2}\rho^2\,d\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{1+y'^2}{y''}\right)^2 dx,$$

on posera

$$\Theta = \left(\frac{1+y'^2}{y''}\right)^2,$$

d'où

$$M'' = -\left(\frac{1+y'^2}{y''}\right)^2.$$

La formule (12') du n° 10, mise sous la forme

$$\Theta + 2Cy' + 2C' = M''y'',$$

donne

$$(a) \qquad \frac{(1+y'^2)^2}{y''} + Cy' + C' = 0.$$

Cette équation revient à la suivante

$$\rho + C\sin\alpha + C'\cos\alpha = 0$$

ou à

$$\rho = A\cos(\alpha - \varepsilon).$$

Soient Ox' une droite faisant avec Ox l'angle ε ; α' l'inclinaison de la tangente sur cette droite, on a

$$\rho = A\cos\alpha',$$

ce qui caractérise une cycloïde dont la base est parallèle à Ox'.

L'intégration de l'équation (a) ajoutera deux nouvelles constantes arbitraires à C et C', et les quatre constantes se détermineront par les conditions qui sont exprimées dans l'énoncé.

15. *Courbe plane d'une longueur donnée l entre deux points donnés et qui, avec les ordonnées de ces points et l'axe Ox, détermine une aire maximum.* — Il s'agit de rendre maximum l'intégrale

$$\int_{x_1}^{x_2} y\,dx,$$

en remplissant la condition

$$(a) \qquad \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\,dx = l.$$

D'après le n° 9, on est conduit à poser

$$\Theta = y + m\sqrt{1+y'^2},$$

m étant une constante inconnue. On déduit de là

$$M' = \frac{my'}{\sqrt{1+y'^2}},$$

et l'équation (15) du n° 11 donne

$$y + m\sqrt{1+y'^2} = \frac{my'^2}{\sqrt{1+y'^2}} + C,$$

d'où

$$dx = \frac{(y-C)\,dy}{\sqrt{m^2-(y-C)^2}}$$

et, en désignant par C′ une seconde constante arbitraire,

$$(y-C)^2 + (x-C')^2 = m^2,$$

équation qui représente une circonférence. On éliminera C et C′ en exprimant que la circonférence passe par les points (x_0, y_0), (x_1, y_1), et l'équation (a) fera ensuite connaître le rayon m. Mais cette recherche est inutile; car, en désignant par a la distance des deux points, on a

$$a = 2m \sin\frac{1}{2}\frac{l}{m},$$

d'où m.

On conclut de là que, *de toutes les courbes fermées isopérimètres, la circonférence limite la plus grande aire.* Il suffit, à cet effet, de supposer que les points (x_0, y_0), (x_1, y_1) sont infiniment voisins.

16. *Courbe plane de longueur l entre deux points déterminés qui, en tournant autour d'un axe Ox situé dans son plan, engendre un volume maximum.* — Il s'agit de

rendre maximum l'intégrale

$$\pi \int_{x_0}^{x_1} y^2 dx$$

en satisfaisant à la condition

$$\int_{x_0}^{x} \sqrt{1+y'^2}\, dx = l.$$

On posera, en conséquence,

$$\theta = y^2 + m\sqrt{1+y'^2},$$

d'où

$$M' = \frac{my'}{\sqrt{1+y'^2}},$$

et la formule (15) du n° 11 donnera

$$y^2 + m\sqrt{1+y'^2} = \frac{my'^2}{\sqrt{1+y'^2}} + C$$

ou

$$y^2 + \frac{m}{\sqrt{1+y'^2}} = C.$$

On déduit de là

$$x = \int \frac{(y^2 - C)\,dy}{\sqrt{m^2 - (y^2 - C)^2}},$$

intégrale qui dépend des fonctions elliptiques.

Si l'on différentie l'avant-dernière équation par rapport a x, on trouve

$$2y - \frac{my''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

ou, en désignant par ρ le rayon de courbure,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{2y}{m},$$

ce qui caractérise la courbe dite *élastique*.

17. *Courbe plane de longueur donnée l entre deux points déterminés qui, en tournant autour d'un axe* Ox *compris dans son plan, engendre une surface minimum.* — Il faut

rendre minimum l'intégrale

$$2\pi \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

en satisfaisant à la condition

$$(a) \qquad \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\,dx = l.$$

On posera donc

$$\theta = (y+m)\sqrt{1+y'^2};$$

mais on rentre dans le cas du n° 13 en y remplaçant y par $y+m$. On a donc

$$y+m = C\sqrt{1+y'^2} = \frac{C}{\cos\alpha},$$

équation d'une chaînette dont l'axe extérieur est parallèle à Ox.

18. *Courbe plane passant par deux points déterminés qui, en tournant autour d'un axe compris dans son plan, engendre sous un volume donné π a une surface minimum.* — L'intégrale

$$2\pi \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

en satisfaisant à la condition que

$$\int_{x_0}^{x_1} y^2\,dx = a,$$

doit être minimum. On posera, en conséquence,

$$\theta = y\sqrt{1+y'^2} + my^2,$$

d'où

$$M' = \frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}},$$

et la formule (15) du n° 11 donnera

$$\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} + my^2 = C.$$

En différentiant par rapport à x, on trouve

$$\frac{1}{y\sqrt{1+y'^2}} - \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} + 2m = 0$$

ou

$$\frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho} = 2m,$$

en désignant par ρ le rayon de la courbure et par ρ' la portion de la normale limitée à Ox. La courbe peut être décrite par le foyer d'une conique roulant sur une droite.

II.

19. *Développement en série trigonométrique de l'expression*

$$R = (1 - 2\alpha\cos\theta + \alpha^2)^{-\nu},$$

dans laquelle $\alpha < 1$ *et* ν *un nombre quelconque positif ou négatif.* — En posant

$$i = \sqrt{-1}, \qquad \beta = e^{\theta i}, \qquad \gamma = e^{-\theta i},$$

on a

$$\cos\theta = \frac{\beta+\gamma}{2}$$

et

$$R = [1 - \alpha(\beta+\gamma) + \alpha^2\beta\gamma]^{-\nu} = (1-\alpha\beta)^{-\nu}(1-\alpha\gamma)^{-\nu}.$$

Si l'on pose encore

$$\nu_1 = \frac{\nu(\nu+1)}{1.2}, \qquad \nu_2 = \frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)}{1.2.3}, \qquad \ldots,$$

on a, en développant en séries,

$$(1-\alpha\beta)^{-\nu} = 1 + \nu\alpha\beta + \nu_1\alpha^2\beta^2 + \nu_2\alpha^3\beta^3 + \ldots,$$
$$(1-\alpha\gamma)^{-\nu} = 1 + \nu\alpha\gamma + \nu_1\alpha^2\gamma^2 + \nu_2\alpha^3\gamma^3 + \ldots;$$

d'où, en multipliant terme à terme et en remarquant que $\beta\gamma = 1$,

$$\begin{aligned}
R = 1 &+ \nu(\beta + \gamma)\alpha \\
&+ [\nu_1(\beta^2 + \gamma^2) + \nu^2]\alpha^2 \\
&+ [\nu_2(\beta^3 + \gamma^3) + \nu\nu_1(\beta + \gamma)]\alpha^3 \\
&+ [\nu_3(\beta^4 + \gamma^4) + \nu\nu_2(\beta^2 + \gamma^2) + \nu_1^2]\alpha^4 \\
&+ [\nu_4(\beta^5 + \gamma^5) + \nu\nu_3(\beta^3 + \gamma^3) + \nu_1\nu_2(\beta + \gamma)]\alpha^5 \\
&+ [\nu_5(\beta^6 + \gamma^6) + \nu\nu_4(\beta^4 + \gamma^4) + \nu_1\nu_3(\beta^2 + \gamma^2) + \nu_2^2]\alpha^6 + \ldots.
\end{aligned}$$

Mais, si n est un nombre entier, on a

$$\beta^n + \gamma^n = 2\cos n\theta;$$

par suite,

$$R = A_0 + A_1\cos\theta + A_2\cos 2\theta + \ldots.$$

en posant

$$\begin{aligned}
A_0 &= 1 + \nu^2\alpha^2 + \nu_1^2\alpha^4 + \nu_2^2\alpha^6 + \ldots. \\
A_1 &= 2\alpha\,(\nu + \nu\nu_1\alpha^2 + \nu_1\nu_2\alpha^4 + \ldots), \\
A_2 &= 2\alpha^2(\nu_1 + \nu\nu_2\alpha^2 + \nu_1\nu_3\alpha^4 + \ldots). \\
A_3 &= 2\alpha^3(\nu_2 + \nu\nu_3\alpha^2 + \nu_1\nu_4\alpha^4 + \ldots), \\
A_4 &= 2\alpha^4(\nu_3 + \nu\nu_4\alpha^2 + \nu_1\nu_5\alpha^4 + \ldots), \\
A_5 &= 2\alpha^5(\nu_4 + \nu\nu_5\alpha^2 + \nu_1\nu_6\alpha^4 + \ldots). \\
A_6 &= 2\alpha^6(\nu_5 + \nu\nu_6\alpha^2 + \nu_1\nu_7\alpha^4 + \ldots). \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

La loi de formation de ces coefficients est évidente.

CHAPITRE PREMIER.

SUR LE MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL LIBRE.

1. *Intégration par approximation des équations du mouvement d'un point dans un plan, par la méthode de la variation des constantes arbitraires.* — Supposons que le point m soit soumis à l'action d'une *force principale* dérivant d'un potentiel U et d'une *force perturbatrice* $\rho\chi$, variable avec la position du mobile, ρ désignant un coefficient constant très petit. Les équations du mouvement sont

$$(1)\qquad \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{\partial U}{\partial x} = \rho\chi_x, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{\partial U}{\partial y} = \rho\chi_y.$$

Supposons que l'on puisse intégrer les équations

$$(1')\qquad \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{\partial U}{\partial y} = 0,$$

et que, a_1, a_2, a_3, a_4 étant quatre constantes arbitraires, leurs intégrales soient

$$(2)\qquad x = f_x(t, a_1, a_2, a_3, a_4), \qquad y = f_y(t, a_1, a_2, a_3, a_4).$$

Cherchons à satisfaire aux équations (1) par ces valeurs, dans lesquelles nous considérerons a_1, a_2, a_3, a_4 comme des fonctions inconnues du temps. En substituant, nous n'obtiendrons que deux équations entre les quatre inconnues, de sorte qu'il nous sera permis d'y joindre deux autres équations quelles qu'elles soient d'ailleurs; nous prendrons les suivantes :

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f_x}{\partial a_1}\dfrac{da_1}{dt} + \dfrac{\partial f_x}{\partial a_2}\dfrac{da_2}{dt} + \ldots = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial f_y}{\partial a_1}\dfrac{da_1}{dt} + \ldots\ldots + \ldots = 0; \end{cases}$$

mais nous avons alors

$$(4) \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{\partial f_x}{\partial t}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial f_y}{\partial t},$$

ce qui exprime que *la vitesse* V *est la même en grandeur et en direction au point* (x, y), *que l'on considère* a_1, a_2, ... *comme constantes ou variables.*

On déduit des équations (4) dans le mouvement réel ou *troublé*

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial^2 f_x}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 f_x}{\partial a_1 \partial t}\frac{da_1}{dt} + \ldots,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial^2 f_y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 f_y}{\partial a_1 \partial t}\frac{da_1}{dt} + \ldots.$$

et les équations (1) deviennent

$$(5) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f_x}{\partial a_1 \partial t}\dfrac{da_1}{dt} + \ldots = \rho\gamma_x, \\ \dfrac{\partial^2 f_y}{\partial a_1 \partial t}\dfrac{da_1}{dt} + \ldots = \rho\gamma_y. \end{cases}$$

Les valeurs de $\frac{da_1}{dt}$, ... déduites des équations (3) et (5) seront de la forme

$$\frac{da_1}{dt} = \rho\,\mathcal{F}_1(t, a_1, a_2, a_3, a_4), \qquad \frac{da_2}{dt} = \rho\,\mathcal{F}_2(t, \ldots), \qquad \ldots.$$

En négligeant ρ^2, on pourra, dans un intervalle suffisamment petit Δt, considérer a_1, a_2, ... comme constants dans $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, ou comme conservant les valeurs qu'elles ont à l'instant t. On obtiendra ainsi par des quadratures les valeurs de a_1, a_2, ... à l'instant $t + \Delta t$ et ainsi de suite : tel est l'esprit de la méthode.

Supposons que, à partir de l'instant t_0, on puisse trouver les valeurs des a_i pour les points successifs A_1, A_2, ... de la trajectoire réelle. En considérant en chacun de ces points les a_i comme constants, on aura une série de courbes tangentes à la trajectoire qui en sera l'enveloppe. On voit aussi qu'en A_j la courbe n'est autre chose que ce que deviendrait la trajectoire, si subitement on venait à supprimer la force perturbatrice.

Substituons maintenant les coordonnées polaires aux coordonnées rectilignes et soit

$$(a) \qquad \varphi(t, r, \theta, a_1, a_2, \ldots) = 0$$

une des intégrales des équations (1') transformées en coordonnées polaires; on a, dans le mouvement non troublé,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\frac{d\theta}{dt} = 0$$

et, dans le mouvement troublé,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial t} + \ldots = 0.$$

Comme $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ et les vitesses $\frac{dr}{dt}$, $r\frac{d\theta}{dt}$ ont les mêmes valeurs dans les deux mouvements, il vient

$$(6) \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial a_1}\frac{da_1}{dt} + \ldots = 0.$$

Dans le mouvement non troublé, on a

$$V^2 = 2U + \text{const.}$$

Or la constante ne peut dépendre que des seules constantes a_i introduites par l'intégration; on peut donc écrire

$$V^2 = 2U + 2\Psi(a_1, \ldots).$$

Comme V^2 a la même valeur dans les deux mouvements, on a, dans le mouvement troublé,

$$dV^2 = 2\,dU + 2\,d\Psi;$$

mais on a aussi

$$dV^2 = 2\,dU + 2\rho\chi\cos(\chi, V)V\,dt,$$

d'où, par comparaison,

$$(7) \qquad \frac{\partial\Psi}{\partial a_1}\frac{da_1}{dt} + \ldots = \rho\chi\cos(\chi, V)V.$$

Si l'on admet que la force principale passe par l'origine, on a,

dans le mouvement non troublé, une équation de la forme

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = \zeta(a_1, \ldots):$$

comme $r^2 \frac{d\theta}{dt}$ a la même valeur dans les deux mouvements, on a, dans le mouvement troublé,

$$dr^2 \frac{d\theta}{dt} = d\zeta;$$

mais on a aussi

$$dr^2 \frac{d\theta}{dt} = \rho\chi \cos\left(\chi, r \frac{d\theta}{dt}\right) r\,dt,$$

d'où

$$(8) \qquad \frac{\partial\zeta}{\partial a_1} \frac{da_1}{dt} \ldots = \rho\chi \cos\left(\chi, r \frac{d\theta}{dt}\right) r.$$

Les équations (7) et (8) et deux équations, telles que (6), permettront de déterminer les a_i.

2. *Application à la recherche de l'influence de la résistance d'un milieu proportionnelle au carré de la vitesse sur le mouvement d'un point matériel attiré par un centre fixe en raison de la distance.* — Soient

$2a$, $2b$ le grand et le petit axe de l'ellipse qui serait décrite si le milieu n'existait pas;
e son excentricité relative;
θ l'angle que forme le rayon vecteur r avec un axe fixe OX;
ω l'angle que forme le grand axe Ox avec OX.

L'équation de l'ellipse peut se mettre sous l'une des deux formes suivantes :

$$(a) \qquad r^2[a^2 \sin^2(\theta - \omega) + b^2 \cos^2(\theta - \omega)] = a^2 b^2.$$

$$(a') \qquad r^2[1 - e^2 \cos^2(\theta - \omega)] = a^2(1 - e^2).$$

On en déduit de la seconde

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{e^2 r \sin(\theta - \omega)\cos(\theta - \omega)}{1 - e^2 \cos^2(\theta - \omega)},$$

d'où, pour l'arc élémentaire,

$$(b)\quad \begin{cases} ds = \dfrac{r\sqrt{1-e^2(2-e^2)\cos^2(\theta-\omega)}}{1-e^2\cos^2(\theta-\omega)}\,d\theta \\ \quad = b[1-e^2(2-e^2)\cos^2(\theta-\omega)]^{\frac{1}{2}}[1-e^2\cos^2(\theta-\omega)]^{-\frac{3}{2}}\,d\theta. \end{cases}$$

Si $k^2 r$ est la force attractive, on a

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2 x, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -k^2 y:$$

d'où, en ayant égard à la condition $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ et désignant par ε une constante arbitraire,

$$x = a\cos(kt+\varepsilon), \qquad y = b\sin(kt+\varepsilon).$$

On déduit de là

$$\frac{dx}{dt} = -k\frac{a}{b}y, \qquad \frac{dy}{dt} = k\frac{b}{a}x$$

et

$$V^2 = \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dx^2}{dt^2} = k^2\left(\frac{a^2}{b^2}y^2 + \frac{b^2}{a^2}x^2\right);$$

mais l'équation de l'ellipse donne

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{r^2-b^2}{a^2-b^2}, \qquad \frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2-r^2}{a^2-b^2},$$

d'où

$$(c)\qquad V^2 = k^2(a^2+b^2-r^2) = \frac{dr^2+r^2\,d\theta^2}{dt^2},$$

ce qui n'est autre chose que l'équation des forces vives. On a aussi

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{dt} = kab$$

ou

$$(d)\qquad r^2\frac{d\theta}{dt} = kab.$$

Enfin, si l'on remarque que $\frac{y}{x} = \operatorname{tang}(\theta-\omega)$, il vient

$$(e)\qquad \operatorname{tang}(\theta-\omega) = \frac{b}{a}\operatorname{tang}(kt+\varepsilon).$$

Les équations (a) ou (a') et (e) seront des intégrales complètes de celles du mouvement elliptique, puisqu'elles renferment les quatre constantes arbitraires a, b, ω, ε; les équations (e) et (d) seront des intégrales premières.

Abordons maintenant la question du mouvement troublé, en représentant par ρV^2 la résistance du milieu [1].

Si l'on remarque que le moment de V, par rapport à O, est $r^2 \frac{d\theta}{dt}$, on a, eu égard aux valeurs (c) et (d),

$$dV^2 = -k^2\,dr^2 - 2\rho V^2\,ds = -k^2\,dr^2 - 2\rho k^2(a^2 + b^2 - r^2)\,ds,$$

$$dr^2 \frac{d\theta}{dt} = -\rho r^2 \frac{d\theta}{dt} V\,dt = -\rho r^2 \frac{d\theta}{dt}\,ds = -\rho kab\,ds;$$

mais, en vertu des équations (c) et (d), on a aussi

$$dV^2 = k^2[d(a^2 + b^2) - dr^2],$$

$$dr^2 \frac{d\theta}{dt} = k\,d\,ab,$$

d'où, par comparaison,

$$a\,da + b\,db = -\rho(a^2 + b^2 - r^2)\,ds,$$

$$d\,ab = b\,da + a\,db = -\rho ab\,ds.$$

On déduit de là

$$(1)\quad \begin{cases} da = -\rho a \dfrac{a^2 - r^2}{a^2 - b^2}\,ds \quad [2], \\ db = -\rho b \dfrac{r^2 - b^2}{a^2 - b^2}\,ds. \end{cases}$$

En substituant à r^2 sa valeur tirée de l'équation (a'), on obtient

$$(1')\quad \begin{cases} da = -\rho a \dfrac{\sin^2(\theta - \omega)}{1 - e^2\cos^2(\theta - \omega)}\,ds, \\ db = -\rho b \dfrac{\cos^2(\theta - \omega)}{1 - e^2\cos^2(\theta - \omega)}\,ds. \end{cases}$$

---

[1] D'après les expériences de Didion, on aurait dans l'air

$$\rho = \frac{0,0236}{R}$$

pour une sphère en laiton dont le rayon R serait exprimé en millimètres.

[2] Nous étions déjà parvenu à ces résultats par des considérations géométriques, à la page 416 du Tome II.

Si l'on pose

$$\Delta = [1 - e^2(2 - e^2)\cos^2(\theta - \omega)]^{\frac{1}{2}}[1 - e^2\cos^2(\theta - \omega)]^{-\frac{5}{2}},$$

il vient, en remplaçant ds par sa valeur (b),

$$(1'')\qquad \begin{cases} da = -\rho ab\sin^2(\theta - \omega)\,\Delta\, d\theta, \\ db = -\rho b^2\cos^2(\theta - \omega)\,\Delta\, d\theta. \end{cases}$$

Si l'on développe les deux facteurs de la fonction Δ en séries ordonnées suivant les puissances de $e^2\cos^2(\theta - \omega)$, qu'on effectue la multiplication, qu'on remplace ensuite dans le produit les puissances du cosinus par leur valeur en fonction du cosinus des arcs multiples, on arrive à une expression de la forme

$$\Delta = \Sigma_0 P_i \cos 2i(\theta - \omega),$$

dans laquelle i représente un nombre entier, P_i une suite de termes en e^{2i}, e^{2i+2}, e^{2i+4}, ... On reconnaît de cette manière que les coefficients P_0 et P_1, les seuls que l'on ait à considérer dans ce qui suit, sont essentiellement positifs et que $P_0 > \frac{P_1}{2}$ (¹); mais, comme les séries ainsi obtenues sont peu convergentes, on mettra plus loin ces coefficients sous une autre forme qui se prêtera mieux aux calculs numériques. Quoi qu'il en soit, les formules (1'') deviennent

$$(1''')\qquad \begin{cases} da = -\rho\dfrac{ab}{2}\left\{\begin{array}{l} P_0[1 - \cos 2(\theta - \omega)] + P_1\left[\cos 2(\theta - \omega) - \dfrac{1 + \cos 4(\theta - \omega)}{2}\right] \\ \quad + \sum_2 P_i\left[\cos 2i(\theta - \omega) \right. \\ \qquad\qquad \left. - \dfrac{\cos 2(i+1)(\theta - \omega) + \cos 2(i-1)(\theta - \omega)}{2}\right] \end{array}\right\} d\theta, \\ db = -\rho\dfrac{b^2}{2}\left\{\begin{array}{l} P_0[1 + \cos 2(\theta - \omega)] + P_1\left[\cos 2(\theta - \omega) + \dfrac{1 + \cos 4(\theta - \omega)}{2}\right] \\ \quad + \sum_2 P_i\left[\cos 2i(\theta - \omega) \right. \\ \qquad\qquad \left. + \dfrac{\cos 2(i+1)(\theta - \omega) + \cos 2(i-1)(\theta - \omega)}{2}\right] \end{array}\right\} d\theta. \end{cases}$$

(¹) $$P_0 = 1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{89}{32}e^4 + \frac{729}{512}e^6 + \frac{17641}{2048}e^8 + \ldots,$$

$$P_1 = e^2\left(\frac{3}{4} + \frac{31}{16}e^2 + \frac{761}{512}e^4 + \frac{15529}{2048}e^6 + \ldots\right).$$

Dans une oscillation elliptique, on peut considérer a, b, e, par suite P_i comme constants, et, en intégrant entre les limites $\theta = \omega$, $\theta = 2\pi + \omega$, on obtient, pour les variations éprouvées par a et b à la fin de cette oscillation,

$$(2)\qquad \begin{cases} \delta a = -\rho ab\pi\left(P_0 - \dfrac{P_1}{2}\right), \\ \delta b = -\rho b^2\pi\left(P_0 + \dfrac{P_1}{2}\right). \end{cases}$$

On a d'ailleurs

$$e\,\delta e = -\frac{b}{a}\,\delta\frac{b}{a},$$

d'où

$$(3)\qquad \delta e = \rho\frac{b^3}{a}\frac{P_1}{e}.$$

On voit ainsi que l'excentricité, par suite l'aplatissement, ira en augmentant.

Si l'on pose

$$\frac{e^2(2-e^2)}{2-e^2(2-e^2)} = \sin 2\alpha = \frac{2\tang\alpha}{1+\tang^2\alpha},$$

$$\frac{e^2}{2-e^2} = \sin 2\beta = \frac{2\tang\beta}{1+\tang^2\beta},$$

$$M = \frac{4\cos^5\beta}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{2-e^2(2-e^2)}{(2-e^2)^2}},$$

on a

$$\Delta = M[1 - 2\tang\alpha\cos 2(\theta-\omega) + \tang^2\alpha]^{\frac{1}{2}}$$
$$\times[1 - 2\tang\beta\cos 2(\theta-\omega) + \tang^2\beta]^{-\frac{5}{2}}.$$

Si l'on pose encore

$$[1 - 2\tang\alpha\cos 2(\theta-\omega) + \tang^2\alpha]^{\frac{1}{2}} = \Sigma_0 A_i\cos 2i(\theta-\omega),$$

$$[1 - 2\tang\beta\cos 2(\theta-\omega) + \tang^2\beta]^{-\frac{5}{2}} = \Sigma_0 B_i\cos 2i(\theta-\omega),$$

on obtient

$$P_0 = M\left(A_0B_0 + \frac{A_1B_1 + A_2B_2 + \ldots}{2}\right),$$

$$P_1 = M\left(A_0B_1 + A_1B_0 + \frac{A_1B_2 + A_2B_1 + A_2B_3 + \ldots}{2}\right).$$

En appliquant les formules qui ont été données au n° 19 de

l'Introduction, on trouve

$$A_0 = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \tang^2\alpha + \left(\frac{1}{2.4}\right)^2 \tang^4\alpha + \left(\frac{1.3}{2.4.6}\right)^2 \tang^6\alpha + \ldots,$$

$$A_1 = 2\tang\alpha\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{2.4}\tang^2\alpha + \frac{1}{2.4}\,\frac{1.3}{2.4.6}\tang^4\alpha + \ldots\right),$$

$$A_2 = 2\tang^2\alpha\left(-\frac{1}{2.4} + \frac{1}{2}\,\frac{1.3}{2.4.6}\tang^2\alpha + \frac{1}{2.4}\,\frac{1.3.5}{2.4.6.8}\tang^4\alpha + \ldots\right),$$

.....;

$$B_0 = 1 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 \tang^2\beta + \left(\frac{5.7}{2.4}\right)^2 \tang^4\beta + \left(\frac{5.7.9}{2.4.6}\right)^2 \tang^6\beta + \ldots,$$

$$B_1 = 2\tang\beta\left(\frac{5}{2} + \frac{5}{2}\,\frac{5.7}{2.4}\tang^2\beta + \frac{5.7}{2.4}\,\frac{5.7.9}{2.4.6}\tang^4\beta + \ldots\right),$$

$$B_2 = 2\tang^2\beta\left(\frac{5.7}{2.4} + \frac{5}{2}\,\frac{5.7.9}{2.4.6}\tang^2\beta + \frac{5.7}{2.4}\,\frac{5.7.9.11}{2.4.6.8}\tang^4\beta + \ldots\right).$$

.....

Dans le cas du cercle où $e = 0$, on a

$$\delta a = \delta b = -\pi\rho a^2 = -3,14\rho a^2, \qquad \delta e = 0,$$

et la courbe décrite par le mobile restera constamment un cercle dont le rayon diminuera jusqu'à zéro.

Pour $e^2 = \frac{1}{2}$ ou pour l'aplatissement $\frac{a-b}{a} = 0,2071$, on a à peu près

$$\delta a = -0,93\pi\rho a^2 = -2,92\rho a^2, \qquad \delta b = -2,65\pi\rho a^2 = -8,33\rho a^2.$$

Dans le cas d'une oscillation rectiligne complète, il faut remonter à la première des équations (1) en y faisant $b = 0$, $ds = dr$, et doubler l'intégrale par rapport à r prise entre les limites $-a$ et a, ce qui donne

$$\delta a = -\frac{8}{3}\rho a^2 = -2,67\rho a^2,$$

ce qui est conforme au résultat connu (p. 172, t. I), qui se rapporte aux petites oscillations d'un pendule simple dans un milieu résistant.

Les formules empiriques

$$\delta a = -\rho a^2(3,14 - 0,47e^2), \qquad \delta b = -\rho a^2(1 - e^2)(3,14 + 27,04e^2)$$

s'accordent assez bien avec les trois résultats ci-dessus.

Si l'on différentie l'équation (a) en considérant seulement a, b, ω comme variables; que l'on substitue à da, db leurs valeurs (1'), puis qu'on remplace b^2 par $a^2(1-e^2)$ et que, enfin, on divise par ρr^2, on trouve

$$-e^2\frac{\sin(\theta-\omega)}{\rho}\frac{d\omega}{ds}$$
$$=-\frac{(1-e^2)a^2}{r^2}+\frac{\sin^4(\theta-\omega)+(1-e^2)^2\cos^4(\theta-\omega)}{1-e^2\cos^2(\theta-\omega)}.$$

En remplaçant r^2 par sa valeur déduite de la formule (a'), on obtient

$$(4)\qquad d\omega=\rho\frac{1-e^2}{e^2}\frac{\sin 2(\theta-\omega)}{1-e^2\cos^2(\theta-\omega)}ds$$

ou, en ayant égard à la valeur (b) de ds,

$$(4')\quad \left\{\begin{aligned} d\omega &= \rho\frac{1-e^2}{e^2}b\sin 2(\theta-\omega)\,\Delta\, d\theta\\ &= \rho\frac{b(1-e^2)}{e^2}\left\{\begin{aligned} &P_0\sin 2(\theta-\omega)\\ &+\tfrac{1}{2}\Sigma_1 P_i[\sin 2(i+1)(\theta-\omega)-\sin 2(i-1)(\theta-\omega)]\end{aligned}\right\}d\theta.\end{aligned}\right.$$

En intégrant entre les limites ω, $2\pi+\omega$ de θ, on trouve $\delta\omega=0$. Il suit de là que, à la fin des oscillations elliptiques successives, les axes de l'ellipse, tout en diminuant, conservent une position fixe.

On déduit, par la différentiation, de l'équation (e)

$$-\frac{d\omega}{\cos^2(\theta-\omega)}=\operatorname{tang}(kt+\varepsilon)\,d\frac{b}{a}+\frac{b}{a}\frac{d\varepsilon}{\cos^2(kt+\varepsilon)}$$

ou, en éliminant $kt+\varepsilon$ au moyen de la même équation, remplaçant da, db par leurs valeurs (1') et $d\omega$ par sa valeur (4),

$$\frac{a}{b}d\varepsilon=\frac{\rho}{1-e^2\cos^2(\theta-\omega)}\left[\frac{1}{4}\frac{b}{a}\sin 4(\theta-\omega)-\frac{1-e^2}{e^2}\sin 2(\theta-\omega)\right]ds$$
$$=\rho b\left[\frac{1}{4}\frac{b}{a}\sin 4(\theta-\omega)-\frac{1-e^2}{e^2}\sin 2(\theta-\omega)\right]\Gamma\, d\omega,$$

en posant

$$\Gamma=[1-e^2(2-e^2)\cos^2(\theta-\omega)]^{\frac{1}{2}}[1-e^2\cos^2(\theta-\omega)]^{-\frac{7}{2}}.$$

On reconnaît, de la même manière, comme pour Δ, que l'on peut écrire

$$\Gamma = \Sigma_0 Q_i \cos 2i(\theta - \omega),$$

et alors on a

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} d\varepsilon = \rho b \left[\frac{1}{4}\frac{b}{a}\sin 4(\theta-\omega) - \frac{1-e^2}{e^2}\sin 2(\theta-\omega)\right] Q_0\, d\theta \\ + \frac{\rho b}{2}\left\{\frac{1}{4}\frac{b}{a}\Sigma_1 Q_i[\sin 2(i+2)(\theta-\omega) - \sin 2(i-2)(\theta-\omega)]\right. \\ \left. - \frac{1-e^2}{e^2}\Sigma_1[Q_i \sin 2(i+1)(\theta-\omega) - \sin 2(i-1)(\theta-\omega)]\right\} d\theta,\end{aligned}$$

et, en intégrant entre $\theta = \omega$, $\theta = 2\pi + \omega$, on trouve $\delta\varepsilon = 0$, résultat d'ailleurs qui ne présente aucun intérêt.

Nous renverrons au Tome I, p. 159, pour ce qui concerne l'étude du mouvement d'une planète dans un milieu résistant.

3. *Emploi des coordonnées elliptiques dans l'intégration de quelques problèmes de Mécanique relatifs au mouvement d'un point dans un plan.* — Par un point (x, y) d'un plan, on peut faire passer l'ellipse et l'hyperbole homofocales

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1, \qquad \frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{c^2 - b^2} = 1,$$

en désignant par c l'excentricité linéaire censée donnée.

A l'inverse, on peut exprimer x et y en fonction de a, b, considérés alors comme variables indépendantes. En se plaçant à ce nouveau point de vue, les équations précédentes donnent

$$(1) \qquad x = \frac{ab}{c}, \qquad y = \frac{1}{c}\sqrt{(a^2 - c^2)(c^2 - b^2)},$$

valeurs dans lesquelles on a supprimé les doubles signes, parce qu'on conviendra d'attribuer à b et à $\sqrt{c^2 - b^2}$ des valeurs tantôt positives, tantôt négatives; cela revient, en effet, à poser

$$b = c\cos\varphi,$$

d'où

$$x = a\cos\varphi, \qquad y = \sqrt{c^2 - b^2}\sin\varphi$$

On déduit des équations (1)

$$(2)\qquad \begin{cases} dx = \dfrac{a\,db + b\,da}{c}, \\ dy = \dfrac{1}{c}\left(\sqrt{\dfrac{c^2-b^2}{a^2-c^2}}\,a\,da - \sqrt{\dfrac{a^2-c^2}{c^2-b^2}}\,b\,db\right); \end{cases}$$

d'où, en désignant par ds l'élément d'une courbe décrite par le point (x, y),

$$(3)\qquad ds^2 = (a^2-b^2)\left(\frac{da^2}{a^2-c^2} + \frac{db^2}{c^2-b^2}\right).$$

Si l'on pose

$$(4)\qquad \alpha = \int \frac{da}{\sqrt{a^2-c^2}}, \qquad \beta = \int \frac{db}{\sqrt{c^2-b^2}},$$

on peut considérer a et b comme étant respectivement des fonctions de α et β.

Arrivons maintenant au mouvement du point (x, y), sollicité par une force dérivant du potentiel U, et posons

$$(5)\qquad \alpha' = \frac{d\alpha}{dt}, \quad \beta' = \frac{d\beta}{dt}, \qquad \lambda = a^2 - b^2.$$

L'équation (3) devient

$$\frac{ds^2}{dt^2} = \lambda(\alpha'^2 + \beta'^2),$$

et l'équation des forces vives donne la suivante :

$$(6)\qquad 2T = \lambda(\alpha'^2 + \beta'^2) = 2U + h,$$

dans laquelle nous considérons U comme étant une fonction de α et β.

A l'équation (6) nous joindrons l'équation de Lagrange [1]

$$(7)\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \alpha'} - \frac{\partial T}{\partial \alpha} = \frac{\partial U}{\partial \alpha}.$$

---

[1] Nous ne ferons connaître que plus loin, au Chap. IV, les équations de la Mécanique analytique. Mais, dans un esprit d'ordre, nous avons cru devoir nous permettre cette anticipation.

On déduit de l'équation précitée

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha'} = \lambda \alpha', \qquad \frac{\partial T}{\partial \alpha} = \frac{1}{2}(\alpha'^2 + \beta'^2)\frac{\partial \lambda}{\partial \alpha},$$

et l'équation (7) devient

$$\frac{d\lambda\alpha'}{dt} = \frac{1}{2}(\alpha'^2 + \beta'^2)\frac{\partial \lambda}{\partial \alpha} + \frac{\partial U}{\partial \alpha} = \frac{2U + h}{2\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial \alpha} + \frac{\partial U}{\partial \alpha}.$$

En multipliant cette dernière équation par $2\lambda\alpha' dt = 2\lambda d\alpha$, on trouve

$$(8) \qquad d(\lambda\alpha')^2 = \frac{\partial \lambda(2U + h)}{\partial \alpha} d\alpha.$$

On remarquera que λ est de la forme

$$(9) \qquad \lambda = \varphi(\alpha) - \varphi_1(\beta).$$

Si l'on admet que λU est de la même forme et si l'on pose

$$(10) \qquad \lambda U = f(\alpha) - f_1(\beta),$$

l'équation (8) devient

$$d(\lambda\alpha')^2 = [2f'(\alpha) + h\varphi'(\alpha)]\, d\alpha;$$

d'où, en désignant par C une constante,

$$(11) \qquad \lambda^2\alpha'^2 = \lambda^2\frac{d\alpha^2}{dt^2} = 2f(\alpha) + h\varphi(\alpha) - C.$$

En portant cette valeur dans l'équation (6), en ayant égard aux valeurs (9) et (10), on trouve

$$(12) \qquad \lambda^2\frac{d\beta^2}{dt^2} = -[2f_1(\beta) + h\varphi_1(\beta)] + C,$$

et, en divisant l'un par l'autre cette équation et la précédente,

$$(13) \qquad \frac{d\alpha}{\sqrt{2f(\alpha) + h\varphi(\alpha) - C}} = \frac{d\beta}{\sqrt{C - [2f_1(\beta) + h\varphi_1(\beta)]}},$$

et la séparation des variables est effectuée.

Revenons maintenant de α, β aux variables a et b. Des formules (4) et de la comparaison entre la troisième des for-

mules (5) et la formule (9) on déduit

$$(14)\qquad \begin{cases} d\alpha = \dfrac{da}{\sqrt{a^2-c^2}}, & d\beta = \dfrac{db}{\sqrt{c^2-b^2}}, \\ \varphi(\alpha) = a^2, & \varphi(\beta) = b^2. \end{cases}$$

Nous pouvons d'ailleurs écrire

$$(15)\qquad f(\alpha) = F(a), \qquad f_1(\beta) = F_1(b),$$

et l'équation (13) devient

$$(16)\qquad \frac{da}{\sqrt{a^2-c^2}\sqrt{2F(a)+ha^2-C}} = \frac{db}{\sqrt{c^2-b^2}\sqrt{C-[2F_1(b)+hb^2]}}.$$

L'équation (11) donne

$$t = \int (a^2-b^2)\frac{d\alpha}{\sqrt{2f(\alpha)+h\varphi(\alpha)-C}},$$

ou, en se reportant à la formule (13),

$$t = \int \frac{a^2 d\alpha}{\sqrt{2f(\alpha)+h\varphi(\alpha)-C}} - \int \frac{b^2 d\beta}{\sqrt{C-[2f_1(\beta)+h\varphi_1(\beta)]}},$$

ou, en ayant égard aux deux premières des relations (14),

$$(17)\qquad \begin{cases} t = \displaystyle\int \frac{a^2 da}{\sqrt{a^2-c^2}\sqrt{2F(a)+ha^2-C}} \\ \qquad - \displaystyle\int \frac{b^2 db}{\sqrt{c^2-b^2}\sqrt{C-[2F_1(b)+hb^2]}}, \end{cases}$$

et l'on obtiendra t par deux quadratures.

Comme application, proposons-nous de déterminer *le mouvement d'un point m attiré par deux centres fixes* F, F′, *en raison inverse du carré de la distance et par le milieu* O *de la droite* FF′ *en raison de la distance.*

Soient

$$r = \overline{mF}, \qquad r' = \overline{mF'}, \qquad \rho = Om$$

et

$$\frac{\mu}{r^2}, \quad \frac{\mu'}{r'^2}, \quad 2\nu\rho$$

les attractions exercées par F, F′, O.

On a

$$U = \frac{\mu}{r} + \frac{\mu'}{r'} - \nu\rho^2,$$

et, dans l'ellipse ayant pour foyers F, F', en ayant égard aux valeurs (1),

$$r = a - \frac{cx}{a} = a + b, \qquad r' = 2a - r = a - b,$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2 = a^2 + b^2 - c^2;$$

par suite,

$$\lambda U = (\mu + \mu')a - \nu a^2(a^2 - c^2) - [(\mu - \mu')b + \nu b^2(c^2 - b^2)],$$

et la condition d'intégration (10) est satisfaite.

Nous ferons, dans les équations (16) et (17),

$$F(a) = (\mu + \mu')a - \nu a^2(a^2 - c^2), \qquad F_1(b) = (\mu - \mu')b + \nu b^2(c^2 - b^2).$$

Les équations (1) feront connaître, en fonction de celles de x, y, les valeurs a_0, b_0 de a, b correspondant à $t = 0$. En différentiant ces équations par rapport à t, on obtiendra aussi les valeurs initiales $\left(\frac{da}{dt}\right)_0$, $\left(\frac{db}{dt}\right)_0$ de $\frac{da}{dt}$, $\frac{db}{dt}$ au moyen de celles de $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0$, $\left(\frac{dy}{dt}\right)_0$. Les intégrales de l'équation (16) seront prises respectivement à partir de a_0, b_0 et, par conséquent, sans introduction d'une constante arbitraire. Il ne nous reste donc que l'inconnue C, que l'on déterminera en divisant l'équation (16) par dt et exprimant que l'on a

$$\frac{da}{dt} = \left(\frac{da}{dt}\right)_0, \qquad \frac{db}{dt} = \left(\frac{db}{dt}\right)_0$$

pour $a = a_0$, $b = b_0$.

CHAPITRE II.

MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL SUR UNE COURBE FIXE.

§ I. — *Questions diverses.*

4. *Quelle est, parmi toutes les courbes passant par un point* A *et comprises dans un même plan vertical, celle pour laquelle un point pesant partant du repos en* A *parcourt un arc d'une longueur quelconque dans le même temps qu'il mettrait à décrire la corde qu'il sous-tend?* (SALLADINI, 1804.)

Soient

Ay la verticale du point de départ A;
B le point de la courbe où se trouve le mobile au bout du temps t;
v la vitesse en ce point;
r la corde AB;
θ l'angle qu'elle forme avec Ay.

On a

$$v^2 = \frac{r^2 d\theta^2 + dr^2}{dt^2} = 2gr\cos\theta;$$

d'où, pour le temps employé à parcourir l'arc AB,

$$t = \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{\frac{r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}}{2gr\cos\theta}}\, d\theta.$$

Le temps qui serait employé à parcourir la corde AB est

donné par

$$r = g\cos\theta\,\frac{t^2}{2},$$

d'où

$$t = \sqrt{\frac{2r}{g\cos\theta}}.$$

Égalant les deux valeurs de t que l'on vient d'obtenir, on a

$$2\sqrt{\frac{r}{\cos\theta}} = \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{\frac{r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}}{r\cos\theta}}\,d\theta;$$

d'où, par la différentiation par rapport à θ,

$$\frac{\cos\theta\,\frac{dr}{d\theta} + r\sin\theta}{\cos\theta} = \sqrt{r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}}.$$

Si l'on élève au carré, on obtient

$$\frac{r\,d\theta}{dr} = \operatorname{tang} 2\theta;$$

d'où, en désignant par c^2 une constante,

$$r^2 = c^2 \sin 2\theta,$$

équation des lemniscates dont A est le centre et dont l'axe est incliné de 45° sur la verticale. Nous renverrons au Tome I, p. 73, pour la démonstration géométrique de ce théorème.

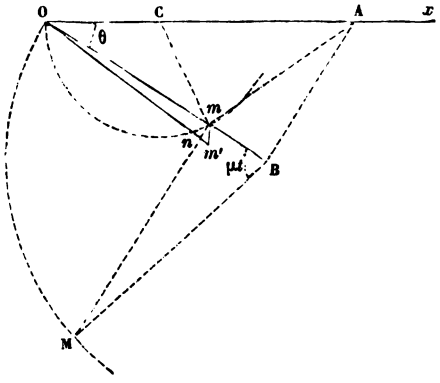
5. *Quelle est, parmi toutes les courbes ayant une origine commune* O, *celle pour laquelle un point matériel, partant de cette origine sans vitesse initiale, soumis à l'action d'une force dirigée vers un centre fixe et proportionnelle à la distance, décrirait un arc quelconque dans le même temps qu'il mettrait à parcourir la corde correspondante?* (O. Bonnet.)

Soient (*fig.* 2)

O le point de départ pris pour origine;
A le centre d'attraction;

$r = \mathrm{O}m$ le rayon vecteur d'un point m de la courbe;
θ l'angle qu'il forme avec $\mathrm{OA}x$;
θ_0 sa valeur initiale;
$\mu^2 \overline{\mathrm{A}m}$ l'attraction exercée sur m;
l la distance OA.

Fig. 2.



Le principe des forces vives donne

$$\frac{r^2 d\theta^2 + dr^2}{dt^2} = \mu^2\left(l^2 - \overline{\mathrm{A}m}^2\right);$$

mais on a

$$\overline{\mathrm{A}m}^2 = l^2 + r^2 - 2lr\cos\theta;$$

par suite,

$$(1) \qquad \frac{r^2 d\theta^2 + dr^2}{dt^2} = \mu^2(2lr\cos\theta - r^2).$$

On déduit de là, pour le temps employé par le mobile à décrire l'arc $\mathrm{O}m$,

$$(2) \qquad t = \frac{1}{\mu}\int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{\frac{r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}}{2lr\cos\theta - r^2}}\, d\theta.$$

En ce qui concerne le parcours de la corde $\mathrm{O}m$, il suffit de supposer θ constant dans l'équation (1) qui devient

$$\frac{dr^2}{dt^2} = \mu^2(2lr\cos\theta - r^2);$$

d'où, par la différentiation par rapport à t,

$$\frac{d^2 r}{dt^2} + \mu^2(r - l\cos\theta) = 0,$$

équation dont l'intégrale est, avec les conditions $r = 0$, $\frac{dr}{dt} = 0$, pour $t = 0$,

$$(3) \qquad r = l\cos\theta(1 - \cos\mu t);$$

on déduit de là, pour la durée du parcours de la corde Om,

$$(4) \qquad t = \frac{1}{\mu}\arccos\left(1 - \frac{r}{l\cos\theta}\right).$$

Comme les valeurs (2) et (4) doivent être égales, on a

$$\arccos\left(1 - \frac{r}{l\cos\theta}\right) = \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{\frac{r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}}{2lr\cos\theta - r^2}}\, d\theta,$$

d'où, en différentiant par rapport à θ,

$$-r\sin\theta - \cos\theta\frac{dr}{d\theta} = \cos\theta\sqrt{r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}}$$

et, en élevant au carré,

$$\frac{r\,d\theta}{dr} = \tang 2\theta,$$

équation de deux systèmes de lemniscates dont le centre est en O et dont les axes font un angle de 45° avec OA.

Ce théorème peut se démontrer géométriquement ainsi qu'il suit :

Soient B la projection de A sur la direction de la droite Om, M l'une des intersections de la perpendiculaire élevée en m avec la circonférence décrite du point B comme centre, et dont le rayon est égal à BO.

Si l'on suppose θ constant, le point m, en parcourant la droite OB avec une vitesse initiale nulle, obéit à l'accélération $\mu^2 \times m$B dirigée de m vers B; d'où il suit que m sera constamment la projection de M sur OB, en supposant que le rayon BM soit animé autour de son centre B de la vitesse an-

gulaire μ. On a ainsi

$$\overline{mB} = \overline{MB} \cos \mu t,$$

ou

$$l \cos \theta - r = l \cos \theta \cos \mu t,$$

ce qui n'est autre chose que l'équation (3).

En considérant maintenant t comme constant et θ comme variable, on voit que cette équation représente un cercle passant par le point O, dont le centre C est situé sur Ox, et dont le rayon est

$$OC = \frac{l}{2}(1 - \cos \mu t).$$

Soient maintenant m' un point de la courbe infiniment voisin de m; n le point de la circonférence ci-dessus déterminé par la droite Om.

Le mobile met le même temps pour parcourir les cordes Om, On que s'il décrivait l'arc Om; le temps employé pour aller de O en m' doit donc être le même, que le mobile reste sur la courbe ou sur la corde, de sorte que l'on doit avoir $mm' = m'n$, d'où

$$\widehat{mm'n} = \widehat{180^\circ} - 2\widehat{mnm'} = 180^\circ - 2(90^\circ - 2\theta) = 2\theta,$$

ce qui caractérise bien les lemniscates auxquelles nous sommes arrivé ci-dessus.

6. *Courbes synchrones.* — On désigne sous le nom de *courbe synchrone* le lieu des extrémités d'arcs issus d'une origine commune, parcourus dans un temps donné par un point matériel pesant, partant de cette origine sans vitesse initiale, lorsque ces arcs appartiennent à des courbes semblables dont l'origine est le centre de similitude.

Il résulte d'une propriété connue du plan incliné et du théorème de Salladini que pour le plan incliné et la lemniscate la courbe synchrone est un cercle.

Pour des boucles de cycloïdes ayant leur base horizontale et une extrémité commune qui est le point de départ, l'équation de la courbe synchrone est très compliquée; néanmoins, on est parvenu à démontrer qu'elle coupe les trajectoires à angle droit (théorème de Bernoulli).

Soient (*fig.* 3)

Ox, Oy l'horizontale et la verticale de l'origine O des cycloïdes;

S le sommet de l'une d'entre elles;

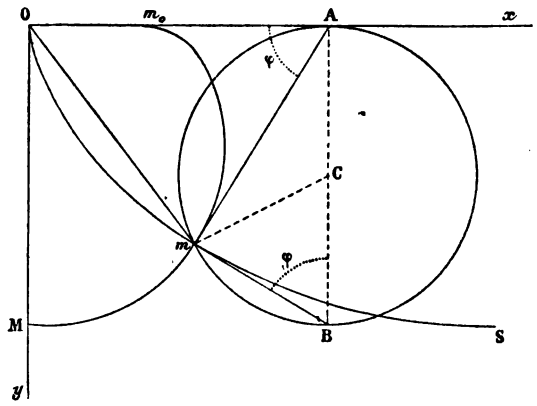
Om l'arc de cette courbe parcouru au bout d'un temps donné;

A, C, $\overline{ACB} = u$ le point de contact avec Ox, le centre et le diamètre du cercle générateur passant par m;

φ l'angle formé par la corde Am avec AO;

s un arc quelconque de la cycloïde, mesuré à partir du sommet S.

Fig. 3.



En se reportant à la page 82 du Tome I, on a

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -\frac{g}{2u} s,$$

d'où, en exprimant que $s = 2u$, $\frac{d\overline{Om}}{dt} = \frac{d(2u - s)}{dt} = 0$ pour $t = 0$,

$$(a) \qquad s = 2u \cos\sqrt{\frac{g}{2u}}\, t.$$

Considérons maintenant t comme constant et u comme variable et désignons par

$$h = \frac{gt^2}{2} = \text{OM}$$

la hauteur de la chute verticale du mobile, censé libre, au bout

du temps t; le point M est l'extrémité de la courbe synchrone qui correspond à $u = \infty$. L'équation (a) peut se mettre sous la forme

$$s = 2u\cos\sqrt{\frac{h}{u}}.$$

Mais nous avons aussi

$$s = 2\overline{mB} = 2u\cos\varphi;$$

d'où, en identifiant,

$$\varphi = \sqrt{\frac{h}{u}}$$

et

$$(1) \qquad u = \frac{h}{\varphi^2}.$$

Nous allons maintenant substituer à u la variable φ.

Nous avons

$$OA = \text{arc}\,Am = \frac{u}{2}\widehat{ACm} = u\varphi = \frac{h}{\varphi},$$

$$\text{corde } Am = u\sin\varphi = \frac{h\sin\varphi}{\varphi^2},$$

et, pour les coordonnées du point m,

$$x = OA - \text{corde } Am\cos\varphi = \frac{h}{\varphi}\left(1 - \frac{1}{2\varphi}\sin 2\varphi\right),$$

$$y = \text{corde } Am\sin\varphi = \frac{h}{\varphi^2}\sin^2\varphi;$$

d'où

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{2h}{\varphi^2}\left(-\cos^2\varphi + \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\varphi}\right),$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{2h}{\varphi^2}\left(-\frac{\sin^2\varphi}{\varphi} + \sin\varphi\cos\varphi\right),$$

puis

$$(2) \qquad \frac{dy}{dx} = -\tang\varphi.$$

Il suit de là que la corde Am est la tangente à la courbe synchrone qui, par suite, est la trajectoire orthogonale des cycloïdes.

Pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$, la tangente est verticale et l'on a

$$x = \frac{2h}{\pi}, \qquad y = \frac{4h}{\pi^2}.$$

La courbe synchrone coupera Ox en un point m_0 correspondant à $\varphi = \pi$ ou déterminé par

$$x = \frac{h}{\pi},$$

et Ox sera tangente en m_0.

On remarquera que, d'après l'équation (1), la tangente en M est horizontale.

La courbe synchrone est rectifiable et carrable; l'expression de son rayon de courbure est même assez simple; mais nous ne croyons pas devoir entrer dans ces détails.

7. *Méthode employée par Despeyrous pour obtenir le développement en série de la durée d'une oscillation du pendule simple dans le vide.* — Cette méthode est plus élégante et plus simple que celle de Poisson, qui a été reproduite à la page 80 du Tome I.

Soient

OA la verticale du point de suspension O;
OB $= l$ la position du pendule à l'instant t;
θ l'angle formé par OB avec OA, considéré comme positif ou négatif, selon que OB est situé ou non du côté du point de départ par rapport à OA;
θ_0 l'écart initial.

L'équation des forces vives donne

$$\frac{l}{2}\frac{d\theta^2}{dt^2} = g(\cos\theta - \cos\theta_0);$$

d'où

$$\sqrt{\frac{2g}{l}}\,dt = \mp \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} = \mp \frac{d\theta}{\sqrt{2}\sqrt{\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}}.$$

Comme dt est essentiellement positif, on devra prendre le signe — ou le signe +, selon que θ décroîtra ou croîtra. En ne considérant qu'une oscillation complète, on devra prendre le signe —.

Si τ est la durée de la demi-oscillation descendante, on a

$$2\sqrt{\frac{g}{l}}\tau = -\int_{\theta_0}^{0} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}}.$$

Comme $\theta < \theta_0$, on peut poser

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sin\frac{\theta_0}{2}\sin\varphi,$$

et l'on a

$$\varphi = 0 \quad \text{pour } \theta = 0, \qquad \varphi = \frac{\pi}{2} \quad \text{pour } \theta = \theta_0.$$

On tire de là

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{1 - \sin^2\frac{\theta_0}{2}\sin^2\varphi},$$

$$\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = 2\sin\frac{\theta_0}{2}\cos\varphi\,d\varphi,$$

d'où

$$d\theta = \frac{2\sin\frac{\theta_0}{2}\cos\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\theta_0}{2}\sin^2\varphi}}.$$

On a, par suite,

$$\tau\sqrt{\frac{g}{l}} = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\theta_0}{2}\sin^2\varphi}} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\theta_0}{2}\sin^2\varphi}},$$

intégrale elliptique de première espèce dont le module est $\sin\frac{\theta_0}{2}$.

En développant en série, on a

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\theta_0}{2}\sin^2\varphi}}$$
$$= 1 + \frac{1}{2}\sin^2\frac{\theta_0}{2}\sin^2\varphi + \ldots + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\sin^{2n}\frac{\theta_0}{2}\sin^{2n}\varphi + \ldots.$$

Si donc on pose

$$u_{2n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\varphi\,d\varphi,$$

il vient

$$\tau\sqrt{\frac{g}{l}} = u_0 + \frac{1}{2}u_1 \sin^2\frac{\theta_0}{2} + \ldots + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}u_{2n}\sin^{2n}\frac{\theta_0}{2} + \ldots.$$

Or, en intégrant par partie, on a

$$\begin{aligned}
u_{2n} &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1}\varphi\, d\cos\varphi \\
&= -(\cos\varphi \sin^{2n-1}\varphi)_0^{\frac{\pi}{2}} + (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2}\varphi\cos^2\varphi\, d\varphi \\
&= (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2}\varphi(1-\sin^2\varphi)\, d\varphi \\
&= (2n-1)u_{2n-2} - (2n-1)u_{2n},
\end{aligned}$$

d'où

$$u_{2n} = \frac{2n-1}{2n}u_{2n-2} \qquad \text{et de même}$$

$$u_{2n-2} = \frac{2n-3}{2n-2}u_{2n-4},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$u_4 = \frac{3}{4}u_2,$$

$$u_2 = \frac{1}{2}u_0.$$

Si l'on multiplie membre à membre ces inégalités et si l'on observe que $u_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{\pi}{2}$, on obtient

$$u_{2n} = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\,\frac{\pi}{2},$$

et l'on a par suite

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{g}{l}}\tau = \frac{\pi}{2}\Big\{1 &+ \left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\frac{\theta_0}{2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\sin^4\frac{\theta_0}{2} + \ldots \\
&+ \left[\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\right]^2\sin^{2n}\frac{\theta_0}{2} + \ldots\Big\}.
\end{aligned}$$

Si θ_0 est suffisamment petit pour qu'on puisse prendre

$$\sin\frac{\theta_0}{2} = \frac{\theta_0}{2},$$

on a, en s'arrêtant au second terme de la série,

$$\tau = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\theta_0^3}{16}\right).$$

§ II. — *Des tautochrones.*

8. On dit qu'une courbe fixe est *tautochrone* lorsqu'un point matériel m, soumis à l'action d'une force extérieure variable en grandeur et en direction suivant une loi donnée, qui est assujetti à décrire cette courbe, arrive dans le même temps en un point déterminé A_1, quel que soit le point de départ A_0 pour lequel la vitesse est nulle.

Pour plus de simplicité, nous supposerons la masse du mobile égale à l'unité.

Nous ne considérerons que le cas où la force extérieure dérive d'un potentiel d'une seule variable χ, potentiel que nous représenterons par

$$-f(\chi).$$

Soient

χ_0, χ_1 les valeurs de χ en A_0, A_1;
v la vitesse du mobile arrivé en un point A correspondant à χ;
s l'arc AA_1.

Nous avons

$$v = -\frac{ds}{dt}$$

et, d'après le principe des forces vives,

$$v^2 = 2[f(\chi_0) - f(\chi)];$$

on déduit de ces deux formules la suivante :

$$dt = -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{ds}{\sqrt{f(\chi_0) - f(\chi)}}.$$

Si τ désigne la durée du trajet A_0A_1, nous avons

$$\tau = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\chi_0}^{\chi_1} \frac{\frac{ds}{d\chi}}{\sqrt{f(\chi_0)-f(\chi)}}\,d\chi$$

ou

$$(1) \qquad \tau = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\chi_1}^{\chi_0} \frac{\frac{ds}{d\chi}}{\sqrt{f(\chi_0)-f(\chi)}}\,d\chi.$$

Il nous faut maintenant exprimer que cette durée est indépendante de χ. A cet effet, en désignant par h une constante et par x une nouvelle variable que nous substituerons à χ, nous poserons

$$(2) \qquad \begin{cases} f(\chi_0)-f(\chi_1) = h, \\ f(\chi)-f(\chi_1) = x, \end{cases}$$

d'où

$$(3) \qquad f(\chi_0)-f(\chi) = h - x,$$

avec les conditions

$$(4) \qquad x = 0 \quad \text{pour} \quad \chi = \chi_1,$$

$$(4') \qquad x = h \quad \text{pour} \quad \chi = \chi_0.$$

Lorsque, en général, une courbe est donnée par deux équations entre trois variables, deux de ces variables peuvent s'exprimer au moyen de la troisième, et il en est par suite de même de l'élément d'arc. Nous pourrons donc poser

$$(5) \qquad ds = \varphi(x)\,dx,$$

et la formule (1), eu égard à la relation (3), devient

$$(6) \qquad \tau = \frac{1}{\sqrt{2}}\int^{h} \frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{h-x}}.$$

Remplaçons maintenant x par une nouvelle variable u définie par la relation

$$(7) \qquad x = uh.$$

En remarquant que $u = 1$ pour $x = h$, l'équation (6) de-

vient

$$(8)\qquad \tau = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{\varphi(uh)\sqrt{h}\,du}{\sqrt{1-u}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 \varphi(uh)\sqrt{uh}\,\frac{du}{\sqrt{(1-u)u}}.$$

Or, comme c'est la valeur de h qui définit la position du point de départ, il nous reste à exprimer que $\frac{d\tau}{dh} = 0$, ou que

$$\int_0^1 \left[\varphi'(uh)\sqrt{uh} + \frac{1}{2}\frac{\varphi(uh)}{\sqrt{uh}}\right]\frac{u\,du}{\sqrt{u(1-u)}} = 0.$$

Mais, si l'on attribue à h une valeur suffisamment petite, tous les éléments de cette intégrale seraient de même signe et leur somme ne serait pas nulle. Il faut donc que chacun d'eux soit nul ou que l'on ait

$$\varphi'(uh)\sqrt{uh} + \frac{1}{2}\frac{\varphi(uh)}{\sqrt{uh}} = 0$$

ou

$$\varphi'(x)\sqrt{x} + \frac{1}{2}\frac{\varphi(x)}{\sqrt{x}} = 0$$

ou encore

$$\frac{d\varphi(x)}{\varphi(x)} = -\frac{1}{2}\frac{dx}{x};$$

d'où, en intégrant et désignant par C une constante,

$$\varphi(x) = \frac{C}{\sqrt{x}}.$$

La formule (5) devient alors

$$ds = \varphi(x)\,dx = C\frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

Si l'on remarque que $s = 0$ pour $x = 0$ ou pour $\chi = \chi_1$, on trouve, en intégrant,

$$s = 2C\sqrt{x}$$

ou

$$(9)\qquad s = 2C\sqrt{f(\chi) - f(\chi_1)}.$$

On déduit de là

$$(10)\qquad ds = C\frac{f'(\chi)\,d\chi}{\sqrt{f(\chi) - f(\chi_1)}}$$

ou

$$ds = 2C^2 \frac{f'(\chi)\,d\chi}{s}. \tag{11}$$

Si F_t désigne la composante tangentielle de la force extérieure, on a, en se rappelant que ds est négatif,

$$-F_t\,ds = -f'(\chi)\,d\chi;$$

d'où, en vertu de la formule (11),

$$F_t = f'(\chi)\frac{d\chi}{ds} = \frac{s}{2C}.$$

Mais, comme

$$F_t = -\frac{d^2s}{dt^2},$$

on a finalement l'équation

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{s}{2C^2}, \tag{12}$$

qui n'est autre chose que celle du mouvement du pendule lorsque l'amplitude de ses oscillations est très petite. Il est donc inutile de remonter à l'équation (8) pour avoir la valeur de τ, qui est la suivante :

$$\tau = \frac{\pi}{2}\sqrt{2C^2} = \frac{\pi C}{\sqrt{2}}.$$

L'équation (10) est l'équation générale des tautochrones dans le cas spécial dont nous venons de nous occuper.

Mais ds s'exprime généralement au moyen des différentielles de trois variables, dont l'une sera χ si l'on veut et dont nous représenterons par z et ζ les deux autres. Le problème est donc indéterminé, puisqu'il faut, pour le résoudre, se donner une relation entre les trois variables. On voit ainsi que, dans le cas d'un potentiel d'une seule variable, il y aura une infinité de tautochrones dont une au moins sera plane.

9. *Tautochrone dans le cas de la pesanteur.* — Soient z la hauteur du mobile au-dessus du point d'arrivée ; on a

$$z = \chi, \qquad f(\chi) = gz, \qquad f(\chi_1) = f(0) = 0,$$

et la formule (9) donne

$$s = 2C\sqrt{gz}.$$

Si la courbe est comprise dans un plan vertical, elle est, d'après cette équation, une cycloïde dont la base est horizontale. En enroulant le plan de la cycloïde sur un cylindre vertical quelconque, la courbe résultante sera toujours une tautochrone. On voit ainsi qu'il n'y a qu'une seule tautochrone plane, mais qu'il y a une infinité de tautochrones à double courbure.

Si le mobile est assujetti à rester sur un plan fixe, incliné de l'angle i sur l'horizon, la tautochrone est encore une cycloïde, puisque, dans ce cas, il est soumis à l'action d'une force, $g \sin i$, dont la direction est constante.

10. *Tautochrone plane dans le cas d'une force attractive émanant d'un centre fixe et proportionnelle à la distance à ce centre.* — La distance r du mobile au centre fixe O devra être substituée à la variable générale χ, et il est évident que la fonction $f(r)$ sera proportionnelle à r^2.

L'équation (9) peut donc se mettre sous la forme

$$s = C\sqrt{r^2 - r_1^2};$$

d'où, pour le carré de la sous-normale polaire,

$$r^2 \frac{dr^2}{ds^2} = -\frac{1}{C^2}(r_1^2 - r^2). \tag{13}$$

Cette équation est celle d'une épicycloïde lorsque l'on a $C < 1$ [1].

---

[1] Soient (*fig.* 4)

m un point d'une circonférence de rayon $OA = R$ qui roule sur une circonférence fixe de rayon $O'A = R'$;

$\varphi = \widehat{OAm}$;

r le rayon vecteur $O'm$ et $\zeta = O'I$ la sous-normale polaire de l'épicycloïde.

On a

$$\zeta = R' \sin\varphi, \qquad Am = 2R\cos\varphi,$$

$$r^2 = R'^2 + \overline{Am}^2 + 2R'\overline{Am}\cos\varphi = R'^2 + 4R(R + R')\cos\varphi.$$

En éliminant φ entre la première et la troisième de ces équations, on

Admettons maintenant que $C \geqq 1$, et désignons par θ l'angle formé par le rayon vecteur r avec une droite fixe $O'x$ menée par l'origine O. Nous avons

$$ds^2 = dr^2 + r^2\, d\theta^2,$$

et l'équation (e) nous donnera

$$d\theta = \pm \frac{1}{r}\sqrt{\frac{r^2(C^2-1)+r_1^2}{r^2-r_1^2}}\, dr.$$

Si $C = 1$, l'équation représente une droite située à la distance r_1 de l'origine.

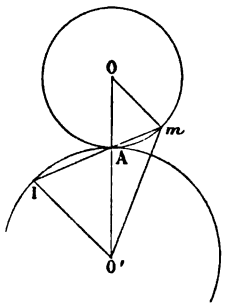
---

trouve

$$(a) \qquad \zeta^2 = \frac{R'^2}{4(R+R')}\left[(2R+R')^2 - r_1^2\right];$$

si la circonférence O était intérieure, il suffirait de changer le signe de R dans cette formule.

Fig. 4.



Supposons que, en résolvant un problème, on soit conduit à un résultat de la forme

$$(b) \qquad s^2 = \frac{1}{k}(r_1^2 - r^2),$$

r_1 étant une constante positive, k une autre constante positive ou négative. Proposons de déterminer les conditions qui doivent être remplies pour que l'équation (b) représente une épicycloïde. En identifiant (a) et (b), on a

$$2R + R' = \pm r_1, \qquad 4(R+R')R = kR'^2;$$

d'où, en considérant R' comme essentiellement positif,

$$R' = \frac{r_1}{\sqrt{1+k}}, \qquad R = \frac{r_1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+k}}\right),$$

ce qui exige que l'on ait $k > -1$.

Pour $C > 1$, le rayon vecteur r croît indéfiniment et θ devient infini avec lui; la courbe est alors une spirale formée de deux branches symétriques qui s'éloignent indéfiniment du centre d'attraction.

Si $r_1 = 0$, on a simplement

$$r = A e^{\pm \frac{\theta}{\sqrt{C^2 - 1}}}.$$

11. *Tautochrone dans un milieu dont la résistance est proportionnelle au carré de la vitesse.* — Si nous désignons par k le coefficient de la résistance du milieu, le principe des forces vives donne

$$\frac{1}{2} dv^2 = -df(\chi) + kv^2 ds,$$

en se rappelant que ds est négatif. On tire de là

$$\frac{dv^2}{ds} - 2kv^2 + \frac{2df(\chi)}{ds} = 0,$$

équation linéaire en v^2 dont l'intégrale est

$$v^2 = -2e^{2ks} \int_{\chi_0}^{\chi} e^{-2ks} df(\chi) = \frac{ds^2}{dt^2},$$

d'où

$$dt = -\frac{e^{-ks} ds}{\sqrt{-2\int_{\chi_0}^{\chi} e^{-2ks} df(\chi)}}$$

et

$$(14) \qquad \tau = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\chi_1}^{\chi_0} \frac{e^{-ks} ds}{\sqrt{-\int_{\chi_0}^{\chi_0} e^{-2ks} df(\chi)}}.$$

Nous remarquerons que l'on a

$$\int_{\chi_0}^{\chi} e^{-2ks} df(\chi) = \int_{\chi_0}^{\chi_1} e^{-2ks} df(\chi) - \int_{\chi_1}^{\chi} e^{-2ks} df(\chi).$$

Posons

$$(15) \qquad -h = \int_{\chi_0}^{\chi_1} e^{-2ks} df(\chi), \qquad x = \int_{\chi_1}^{\chi} e^{-2ks} df(\chi),$$

$$e^{-ks} ds = \varphi(x) dx,$$

x étant une variable que nous substituerons à χ; nous aurons $x = 0$ pour $\chi = \chi_1$ et $x = h$ pour $\chi = \chi_0$. L'équation (28) devient

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^h \frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{h-x}} \tag{16}$$

et prend ainsi la même forme que lorsqu'il n'existe pas de milieu. On est donc conduit à poser, en désignant par C une constante,

$$\varphi(x) = \frac{C}{\sqrt{x}} \tag{17}$$

ou

$$e^{-ks}\,ds = \frac{C\,dx}{\sqrt{x}}.$$

Comme on a $s = 0$ pour $\chi = \chi_1$ ou pour $x = 0$, il vient, en intégrant,

$$-\frac{1}{k}(e^{-2ks} - 1) = 2C\sqrt{x}.$$

En élevant au carré et remplaçant x par sa valeur (15), on trouve

$$\frac{1}{4k^2C^2}(e^{-ks} - 2e^{-ks} + 1) = \int_{\chi_1}^{\chi} e^{-2ks}\,df(\chi).$$

Si nous différentions, nous trouvons

$$\frac{1}{2k^2C}(-1 + e^{ks})\,ds = df(\chi).$$

En intégrant maintenant et remarquant que $s = 0$ pour $\chi = \chi_1$, il vient

$$\frac{1}{2KC^2}\left(-s + \frac{e^{ks} - 1}{k}\right) = f(\chi) - f(\chi_1)$$

pour l'équation générale des tautochrones.

On remarquera que τ a la même valeur que dans le vide, en vertu de la formule (16) et de l'expression (17) de la fonction $\varphi(x)$; il est facile de démontrer en outre que la composante tangentielle de la force

$$-f'(\chi)\frac{d\chi}{ds} - kv^2$$

est proportionnelle à s.

§ III. — *Des brachistochrones.*

12. On donne le nom de *brachistochrone* à la courbe que doit décrire un point matériel soumis à l'action d'une force dérivant d'un potentiel pour que, en partant d'une position donnée sans vitesse, il arrive à une position également donnée dans un temps minimum.

Cette définition peut recevoir diverses extensions, en supposant qu'au lieu de deux points on ait deux courbes données; alors les points de départ et d'arrivée sont à déterminer; enfin, le point matériel peut être assujetti à se mouvoir sur une surface.

Nous rappellerons d'abord les formules suivantes

$$(a)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{\rho} = \frac{d\varepsilon}{ds}, \\ &\cos\alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}, \qquad \cos\lambda = \frac{d\cos\alpha}{d\varepsilon}, \\ &\cos\beta = \frac{dy}{ds} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}, \qquad \cos\mu = \frac{d\cos\beta}{d\varepsilon}, \\ &\cos\gamma = \frac{dz}{ds} = \frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}, \qquad \cos\nu = \frac{d\cos\gamma}{d\varepsilon}, \end{aligned}\right.$$

dans lesquelles ρ et $d\varepsilon$ sont le rayon de courbure et l'angle de contingence d'une courbe; α, β, γ et λ, μ, ν les angles formés avec Ox, Oy, Oz par la tangente et la normale principale.

Soient

(x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1) les points de départ et d'arrivée;
$\varphi(x, y, z)$ le potentiel;
$P_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $P_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $P_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z}$ les composantes suivant Ox, Oy, Oz de la force extérieure P;
$P_t = P_x\cos\alpha + P_y\cos\beta + P_z\cos\gamma$ sa composante tangentielle;
V la vitesse du mobile à l'instant t.

En représentant par φ_0 la valeur de φ au point de départ nous avons

$$V^2 = 2(\varphi - \varphi_0),$$

et V est une fonction de x, y, z.

De l'équation

$$V\,dV = P_t\,ds = P_x\,dx + P_y\,dy + P_z\,dz$$

on déduit

$$(b)\qquad \begin{cases} P_t = V\dfrac{dV}{ds} = \dfrac{V}{\cos\alpha}\dfrac{dV}{dx}, \\ P_x = V\dfrac{\partial V}{\partial x}, \qquad P_y = V\dfrac{\partial V}{\partial y}, \qquad P_z = V\dfrac{\partial V}{\partial z}. \end{cases}$$

Il s'agit de rendre minimum la durée

$$(c)\qquad \tau = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}{V}\,dx.$$

On posera, en conséquence, en se reportant au titre I de l'Introduction,

$$(d)\qquad \theta = \frac{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}{V}$$

et l'on aura

$$M = -\frac{1}{V^2}\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{P_y}{V^3\cos\alpha},$$

$$M' = \frac{y'}{V\sqrt{1+y'^2+z'^2}} = \frac{\cos\beta}{V},$$

$$\frac{dM'}{dx} = \frac{1}{V}\frac{d\cos\beta}{dx} - \frac{\cos\beta}{V^2}\frac{dV}{dx}$$

$$= \frac{\cos\mu}{V\cos\alpha}\frac{d\varepsilon}{ds} - \frac{\cos\beta\,P_t}{V^3\cos\alpha} = -\frac{1}{V\cos\alpha}\left(\frac{P_t\cos\beta}{V^2} - \frac{V^2}{\rho}\cos\mu\right);$$

par suite,

$$(e)\qquad \begin{cases} Y = -\dfrac{1}{V^2\cos\alpha}\left(V\dfrac{d^2y}{ds^2} - \dfrac{dV}{ds}\dfrac{dy}{ds} + \dfrac{\partial V}{\partial y}\right) \\ \quad = -\dfrac{1}{V^3\cos\alpha}\left(P_y + \dfrac{V^2}{\rho}\cos\mu - P_t\cos\beta\right) \\ \text{et, de même,} \\ Z = -\dfrac{1}{V^2\cos\alpha}\left(V\dfrac{d^2z}{ds^2} - \dfrac{dV}{ds}\dfrac{dz}{ds} + \dfrac{\partial V}{\partial z}\right) \\ \quad = -\dfrac{1}{V^3\cos\alpha}\left(P_z + \dfrac{V^2}{\rho}\cos\nu - P_t\cos\gamma\right). \end{cases}$$

On peut mettre ces fonctions sous une autre forme, en substituant t à la variable s. On a, en effet,

$$\frac{dy}{ds} = \frac{1}{V}\frac{dy}{dt}, \qquad \frac{dV}{ds} = \frac{dV}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} = \frac{1}{V}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{V}\frac{dy}{dt}\right) = \frac{1}{V}\left(-\frac{1}{V^2}\frac{dV}{dt}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{V}\frac{d^2y}{dt^2}\right);$$

par suite,

$$(e') \quad \left\{\begin{array}{l} Y = -\dfrac{1}{V^3\cos\alpha}\left(\dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{2}{V}\dfrac{dV}{dt}\dfrac{dy}{dt} + V\dfrac{\partial V}{\partial y}\right) \\ \text{et, de même,} \\ Z = -\dfrac{1}{V^3\cos\alpha}\left(\dfrac{d^2z}{dt^2} - \dfrac{2}{V}\dfrac{dV}{dt}\dfrac{dz}{dt} + V\dfrac{\partial V}{\partial z}\right). \end{array}\right.$$

Si la brachistochrone se rapporte à deux courbes, l'une de départ et l'autre d'arrivée, les conditions (14′) du n° 11 de l'Introduction se réduiront à la suivante qui s'appliquera à chacun des points extrêmes

$$1 + \cos\beta(\delta y - y'\delta x) + \cos\gamma(\delta z - z'\delta x) = 0$$

ou

$$\cos\alpha\frac{\delta z}{\delta s} + \cos\beta\frac{\delta y}{\delta s} + \cos\gamma\frac{\delta z}{\delta s} = 0.$$

Donc *la brachistochrone sera normale aux courbes de départ et d'arrivée.*

13. *Brachistochrone, lorsque le point mobile n'est pas assujetti à rester sur une surface.* — On a $Y = 0$, $Z = 0$ ou, en ayant égard à (e),

$$(f) \quad \left\{\begin{array}{l} P_y + \dfrac{V^2}{\rho}\cos\mu - P_t\cos\beta = 0, \\ P_z + \dfrac{V^2}{\rho}\cos\nu - P_t\cos\gamma = 0 \end{array}\right.$$

En ajoutant ces équations respectivement multipliées par $\cos\beta$ et $\cos\gamma$, et remarquant que

$$\cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu = -\cos\alpha\cos\lambda,$$
$$P_y\cos\beta + P_z\cos\gamma = P_t - P_x\cos\alpha,$$

on trouve

$$(f') \qquad P_x + \frac{V^2}{\rho}\cos\lambda - P_t\cos\alpha = 0.$$

On déduit de là

$$P_x\cos\lambda + P_y\cos\mu + P_z\cos\nu = -\frac{V^2}{\rho};$$

donc *la composante normale de la force extérieure est égale à la force centrifuge* (théorème d'Euler).

Il résulte des équations (f), (f') que P se trouve dans le plan de P_t et de $\frac{V^2}{\rho}$, c'est-à-dire dans le plan osculateur. Donc *le plan osculateur est normal à la surface de niveau correspondante*. Cette propriété et la précédente caractérisent complètement la brachistochrone.

En ayant égard aux formules (e), les équations (f') et (f) reviennent aux suivantes :

$$(g) \qquad \left\{\begin{aligned} &V\frac{d^2x}{ds^2} - \frac{dV}{ds}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0,\\ &V\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dV}{ds}\frac{dy}{ds} + \frac{dV}{dz} = 0,\\ &V\frac{d^2z}{ds^2} - \frac{dV}{ds}\frac{dz}{ds} + \frac{dV}{dz} = 0,\end{aligned}\right.$$

dont deux seulement seront distinctes et seront les équations différentielles de la courbe. Leur intégration introduira quatre constantes arbitraires que l'on fera disparaître en exprimant que la courbe passe par les points de départ et d'arrivée. Les équations précédentes peuvent aussi se mettre sous la forme plus simple

$$(g') \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\frac{1}{V}}{\partial x} - \frac{d}{ds}\frac{1}{V}\frac{dx}{ds} = 0,\\ &\frac{\partial\frac{1}{V}}{\partial y} - \frac{d}{ds}\frac{1}{V}\frac{dy}{ds} = 0,\\ &\frac{\partial\frac{1}{V}}{\partial z} - \frac{d}{ds}\frac{1}{V}\frac{dz}{ds} = 0.\end{aligned}\right.$$

La composante normale de la force P peut se mettre sous la

forme $V\frac{d\varepsilon}{dt}$ et s'annule avec V. *Il suit de là que, au point de départ, la courbe est normale à la surface de niveau passant par ce point.*

En laissant indéterminée la position du point d'arrivée, deux des coordonnées d'une brachistochrone s'exprimeront au moyen de la troisième et de deux constantes arbitraires a, a_1. L'équation

$$\frac{1}{2}\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}=\varphi-\varphi_0$$

permettra de déterminer t en fonction de la troisième coordonnée et de a, a_1, sans introduire une nouvelle constante, puisque t est nul au point de départ. On peut concevoir que, inversement, la troisième coordonnée, par suite les deux autres, soient exprimées au moyen de t, a, a_1 et c'est ce qu'on supposera dans ce qui suit.

Soient

OA, OA′ les arcs décrits dans le même temps t de deux brachistochrones issues d'un point O, infiniment voisines, et dont les paramètres sont respectivement a, a_1 et $a+\delta a$, $a_1+\delta a_1$;

AT la tangente en A à OA;

Aθ la direction de AA′;

x, y, z les coordonnées de A.

Les coordonnées de A′ étant

$$x+\frac{\partial x}{\partial a}\delta a+\frac{\partial x}{\partial a_1}\delta a_1,\quad y+\frac{\partial y}{\partial a}\delta a+\frac{\partial y}{\partial a_1}\delta a_1,\quad z+\frac{\partial z}{\partial a}\delta a+\frac{\partial z}{\partial a_1}\delta a_1,$$

on a

$$\cos(\theta,x)=\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\delta a}{\delta\sigma}+\frac{\partial x}{\partial a_1}\frac{\delta a_1}{\delta\sigma},$$

$$\cos(\theta,y)=\frac{\partial y}{\partial a}\frac{\delta a}{\delta\sigma}+\frac{\partial y}{\partial a_1}\frac{\delta a_1}{\delta\sigma},$$

$$\cos(\theta,z)=\frac{\partial z}{\partial a}\frac{\delta a}{\delta\sigma}+\frac{\partial z}{\partial a_1}\frac{\delta a_1}{\delta\sigma},$$

en posant

$$(h)\quad \delta\sigma=\mathrm{AA}'=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial a}\delta a+\frac{\partial x}{\partial a_1}\delta a_1\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial a}\delta a+\frac{\partial y}{\partial a_1}\delta a_1\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial a}\delta a+\frac{\partial z}{\partial a_1}\delta a_1\right)^2}:$$

d'ailleurs

$$\cos(T, x) = \frac{dx}{ds} = \frac{1}{V}\frac{dx}{dt}, \quad \cos(T, y) = \frac{1}{V}\frac{dy}{dt}, \quad \cos(T, z) = \frac{1}{V}\frac{dz}{dt};$$

on a donc

$$\cos(T, \theta) = \frac{1}{V\,\delta\sigma}(U\,\delta a + U_1\,\delta a_1),$$

en posant

$$(i) \quad \begin{cases} U = \dfrac{\partial x}{\partial a}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial y}{\partial a}\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{\partial z}{\partial a}\dfrac{dz}{dt}, \\ U_1 = \dfrac{\partial x}{\partial a_1}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial y}{\partial a_1}\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{\partial z}{\partial a_1}\dfrac{dz}{dt}; \end{cases}$$

on déduit de là

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= \frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{\partial z}{\partial a} \\ &\quad + \frac{dx}{dt}\frac{\partial}{\partial a}\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}\frac{\partial}{\partial a}\frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt}\frac{\partial}{\partial a}\frac{dz}{dt} \\ &= \frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{\partial z}{\partial a} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}\right) \end{aligned}$$

ou

$$(j) \qquad \frac{dU}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{\partial z}{\partial a} + V\frac{\partial V}{\partial a}.$$

Les équations (g) reviennent à celles-ci :

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{2}{V}\frac{dV}{dt}\frac{dx}{dt} + V\frac{\partial V}{\partial x} &= 0, \\ \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{2}{V}\frac{dV}{dt}\frac{dy}{dt} + V\frac{\partial V}{\partial y} &= 0, \\ \frac{d^2z}{dt^2} - \frac{2}{V}\frac{dV}{dt}\frac{dz}{dt} + V\frac{\partial V}{\partial z} &= 0, \end{aligned}$$

qui ajoutées, après les avoir respectivement multipliées par $\frac{\partial x}{\partial a}$, $\frac{\partial y}{\partial a}$, $\frac{\partial z}{\partial a}$, donnent

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{\partial z}{\partial a} - \frac{2}{V}\frac{dV}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{dy}{dt}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{dz}{dt}\frac{\partial z}{\partial a}\right) \\ &\quad + V\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a}\right) \\ &= \frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{\partial z}{\partial a} - \frac{2U}{V}\frac{dV}{dt} + V\frac{\partial V}{\partial a} \end{aligned}$$

ou, vu (j),

$$\frac{dU}{dt} - \frac{2U}{V}\frac{dV}{dt} = 0,$$

d'où

$$U = \Psi(a, a_1)V^2,$$

en désignant par Ψ une certaine fonction de a et a_1. On obtiendra une expression semblable pour U_1, et l'on a, par suite,

$$\cos(T, \theta) = \frac{V}{\delta\sigma}[\Psi(a, a_1)\,\delta a + \Psi_1(a, a_1)\,\delta a_1].$$

Comme δa, δa_1 sont arbitraires, on peut faire $\delta a_1 = 0$, et l'on a, en ayant égard à la valeur (h),

$$\cos(T, \theta) = \frac{V\Psi(a, a_1)}{\sqrt{\frac{\partial x^2}{\partial a^2} + \frac{\partial y^2}{\partial a^2} + \frac{\partial z^2}{\partial a^2}}}.$$

Supposons que Oz soit dirigé suivant la normale à la surface de niveau passant par le point de départ O, c'est-à-dire suivant la tangente à OA. Si l'arc OA est très petit, on peut considérer la force P comme constante pendant le temps très court employé à parcourir cet arc, et, en désignant par g sa valeur, on a

$$V = \sqrt{2gz}.$$

En supposant x et y développés suivant les puissances de z, et en s'arrêtant aux termes du second ordre, on a deux expressions de la forme

$$x = kz^2, \qquad y = k'z^2,$$

dans lesquelles k et k' sont des fonctions de a, a_1.

On déduit de là

$$\sqrt{2gz}\,dt = ds = \sqrt{1 + 4(k^2 + k'^2)z^2}\,dz = [1 + 2(k^2 + k'^2)z^2]\,dz,$$

d'où

$$\frac{dz}{\sqrt{z}} = \sqrt{2g}\,[1 - 2(k^2 + k'^2)z^2]\,dt.$$

En portant dans le second membre la valeur $z = \frac{gt^2}{2}$ obte-

nue comme première approximation, puis intégrant, on trouve

$$z = \frac{gt^2}{2}\left[1 - \frac{2}{5}(k^2 + k'^2)g^2t^4\right].$$

Il résulte de là que $\frac{\partial z}{\partial a}$ est du sixième ordre et peut être négligé.

On a ensuite

$$\frac{\partial x}{\partial a} = \frac{\partial k}{\partial a} z^2 = \frac{\partial k}{\partial a}\frac{g^2t^4}{4}, \qquad \frac{\partial y}{\partial a} = \frac{\partial k'}{\partial a}\frac{g^2t^4}{4},$$

et, comme $V = gt$, il vient

$$\cos(T, \Theta) = \frac{4}{gt^3}\frac{\Psi(a, a_1)}{\sqrt{\frac{\partial k^2}{\partial a^2} + \frac{\partial k'^2}{\partial a^2}}},$$

ce qui est inadmissible; il faut donc que Ψ soit nul et de même que $\Psi_1 = 0$. Donc $(\widehat{T, \Theta}) = 90°$.

En faisant varier les paramètres a, a_1, le lieu des extrémités A des arcs isochrones OA est une surface *synchrone*. On voit, d'après ce qui précède, que les *arcs isochrones des brachistochrones sont normaux à la surface synchrone.*

Si les équations des brachistochrones ne renferment qu'un seul paramètre arbitraire, la surface sera remplacée par une ligne synchrone normale aux arcs isochrones.

Nous verrons plus loin que, dans le cas de la pesanteur, la brachistochrone est une cycloïde dont la base est horizontale. Le théorème précédent, qui paraît dû à M. J. Bertrand, est donc une généralisation du théorème de Jean Bernoulli (n° 6). M. Bertrand a donné de son théorème la démonstration suivante.

Soient OA, OA′ les arcs de deux brachistochrones infiniment voisines, issues d'un même point O et décrites dans le même temps t; AT, A′B les tangentes en A et A′, menées en sens inverse. Supposons que l'angle $\widehat{AA'B} = \widehat{A'AT}$ soit aigu, et menons dans le plan BA′A la droite AB faisant avec AA′ un angle égal à $\widehat{AA'B}$; on a AB = A′B. Soient t_1 le temps qu'emploierait le mobile pour aller de O en B; V la vitesse ac-

quise en A, qui est la même en A′ et B aux infiniment petits près du premier ordre.

En allant de O en A en passant par B, le mobile emploierait le temps

$$t_1 + \frac{BA}{V} > t.$$

Pour aller de O en A′, il emploie le temps

$$t = t_1 + \frac{BA'}{V},$$

d'où l'on conclurait BA > BA′, ce qui est absurde, et le théorème se trouve démontré.

14. *Brachistochrone lorsque le point mobile est assujetti à rester sur une surface.* — Soient

$$(k) \qquad F(x, y, z) = 0$$

l'équation de la surface; l, m, n les angles que forme sa normale avec Ox, Oy, Oz.

Les formules (11‴) du n° 8 de l'Introduction et (e) du n° 12 du Chapitre actuel donnent, en désignant par K une quantité inconnue,

$$(l) \qquad \begin{cases} P_y + \dfrac{V^2}{\rho}\cos\mu - P_t\cos\beta = K\cos m, \\ P_z + \dfrac{V^2}{\rho}\cos\nu - P_t\cos\gamma = K\cos n. \end{cases}$$

Si l'on ajoute ces deux équations, multipliées respectivement par $\cos\beta$, $\cos\gamma$, et si l'on remarque que

$$P_y\cos\beta + P_z\cos\gamma = P_t - P_x\cos\alpha,$$
$$\cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu = -\cos\alpha\cos\lambda,$$

on trouve

$$(l') \qquad P_x + \frac{V^2}{\rho}\cos\lambda - P_t\cos\alpha = K\cos l.$$

Supposons que l'on place l'origine des coordonnées en un point O de la courbe, que l'on dirige Ox suivant la tangente à cette courbe et Oz suivant la normale à la surface; Oy sera la normale géodésique au point O de la courbe.

Pour ce point, on a $\alpha = 0$, $\beta = \gamma = 90^\circ$, $\lambda = 90^\circ$, $\mu = 90^\circ - \nu$, $l = m = 90^\circ$, $P_x = P_t$; l'équation (l') devient une identité. Des deux équations (l), la seconde renferme seule l'inconnue K qu'elle déterminera; la première devient, en désignant par Γ le rayon de courbure géodésique,

$$P_y = -\frac{V^2}{\rho}\sin\nu = -\frac{V^2}{\Gamma}.$$

Donc *la composante géodésique de la force extérieure est égale à la force centrifuge géodésique,* ce qui caractérise une brachistochrone.

La condition précédente est satisfaite pour une ligne géodésique censée décrite par un point sollicité par la force normale à la surface et dont le potentiel est $F(x, y, z)$. Donc *la catégorie des brachistochrones* comprend les lignes géodésiques.

Si $d\eta$ est l'angle de contingence géodésique, la composante géodésique prend la forme $-V\frac{d\eta}{dt}$ et s'annule avec V. Si donc on désigne sous le nom de *courbes de niveau* les intersections de la surface donnée avec les surfaces de niveau, la *tangente au point de départ est normale à la courbe de niveau en ce point.*

D'après les formules (e) du n° 12, les équations (l) et (l') reviennent aux deux suivantes

$$(m)\quad \frac{V\frac{d^2x}{ds^2} - \frac{dV}{ds}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial V}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{V\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dV}{ds}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial V}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{V\frac{d^2z}{ds^2} - \frac{dV}{ds}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial V}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial z}},$$

dont, d'après ce qui précède, l'une rentre dans l'autre. L'intégration de l'équation que l'on conservera, introduira deux constantes arbitraires, que l'on déterminera par les conditions que la courbe passe par les points de départ et d'arrivée. Mais, si l'on ne considère que des brachistochrones ayant le même point de départ, l'équation intégrale ne renfermera qu'une seule constante a, et cette équation, jointe à celle de la surface, permettra de déterminer deux des coordonnées en fonction de la troisième et de a; l'équation des forces vives

fera ensuite connaître t au moyen de ces deux éléments. Mais, à l'inverse, on peut concevoir que la troisième coordonnée et, par suite, les deux autres, soient exprimées en fonction de t et de a, et c'est à ce point de vue que nous nous placerons.

Soient OA, OA′ les arcs isochrones correspondant à une valeur donnée du temps, de deux brachistochrones infiniment voisines dont les paramètres sont a, $a + \delta a$. En nous reportant aux notations du numéro précédent, nous avons

$$\cos(T, \Theta) = \frac{U}{V\sqrt{\frac{\partial x^2}{\partial a^2} + \frac{\partial y^2}{\partial a^2} + \frac{\partial z^2}{\partial a^2}}},$$

$$U = \frac{\partial x}{\partial a}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial y}{\partial a}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial z}{\partial a}\frac{dz}{dt},$$

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{\partial z}{\partial a} + V\frac{\partial V}{\partial a}.$$

En vertu des formules (e') du n° 12, les équations (l') et (l) reviennent aux suivantes :

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{2}{V}\frac{dV}{dt}\frac{dx}{dt} + V\frac{\partial V}{\partial x} = K\frac{\partial F}{\partial x},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{2}{V}\frac{dV}{dt}\frac{dy}{dt} + V\frac{\partial V}{\partial y} = K\frac{\partial F}{\partial y},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} - \frac{2}{V}\frac{dV}{dt}\frac{dz}{dt} + V\frac{\partial V}{\partial z} = K\frac{\partial F}{\partial z}.$$

Si l'on remarque

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a} = 0,$$

ces équations donnent

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{\partial z}{\partial a}\\ - \frac{2}{V}\frac{dV}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{dy}{dt}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{dz}{dt}\frac{\partial z}{\partial a}\right)\\ + V\left(\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a}\right) = 0,\end{aligned}$$

équation que nous avons déjà obtenue au n° 13 et qui nous a permis d'écrire

$$U = \Psi(a)\,V^2.$$

Nous avons donc

$$\cos(T, \Theta) = \frac{V\Psi(a)}{\sqrt{\frac{\partial x^2}{\partial a^2} + \frac{\partial y^2}{\partial a^2} + \frac{\partial z^2}{\partial a^2}}}.$$

Dirigeons Ox suivant la tangente à la courbe, Oy suivant la normale à la surface; désignons par g la valeur de P_t en O. Nous n'avons plus qu'à suivre le raisonnement de la fin du n° 13 qui conduit à $\Psi = 0$.

Donc *la courbe synchrone des brachistochrones est normale à ces dernières*. Ce théorème peut d'ailleurs se démontrer géométriquement, en suivant la marche indiquée à la fin du numéro précédent.

On en déduit, comme corollaire, ce théorème de Gauss : *Le lieu des extrémités d'arcs égaux des lignes géodésiques d'une surface, issues d'un même point, coupe ces lignes orthogonalement.*

15. *Brachistochrone dans le cas de la pesanteur, lorsque le mobile n'est pas assujetti à rester sur une surface.* — Les surfaces de niveau étant des plans horizontaux, la brachistochrone sera comprise dans un plan vertical.

Soient Ox la verticale du point de départ O pris pour origine; α l'inclinaison de la tangente sur Oy.

On a

$$V^2 = 2gx.$$

Comme α diminue quand s augmente, il faut prendre

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{d\alpha}{ds} = -\sin\alpha\,\frac{d\alpha}{dx},$$

et l'on a, d'après le théorème d'Euler,

$$g\cos\alpha = \frac{V^2}{\rho} = -\frac{2gx\sin\alpha\,d\alpha}{dx};$$

d'où

$$\frac{1}{2}\,\frac{dx}{x} = -\frac{\sin\alpha\,d\alpha}{\cos\alpha}$$

et

$$\cos\alpha = C\sqrt{x},$$

équation d'une cycloïde dont la base est horizontale et O un point de rebroussement.

16. *Brachistochrone dans le cas d'une force dirigée vers un centre fixe* O, *fonction de la distance à ce centre, lorsque le mobile n'est pas assujetti à rester sur une surface.* — La courbe est plane, puisque les surfaces de niveau sont des sphères. Nous ferons passer l'axe Ox par le point de départ m_0, où il sera tangent à la courbe qui présentera sa convexité au même axe.

Soient

$f(r)$ le potentiel;
θ l'angle formé par r avec Ox;
α l'angle de la normale avec r.

On a

$$V^2 = 2[f(r_0) - f(r)].$$

L'angle formé par la tangente avec Ox étant $\alpha + 90^\circ + \theta$, l'angle de contingence est $-(d\alpha + d\theta)$; et, comme $ds = -\frac{dr}{\sin\alpha}$, on a

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\alpha + d\theta}{dr}\sin\alpha.$$

La composante normale de la force étant $f'(r)\cos\alpha$, on a, en vertu du théorème d'Euler,

$$2[f(r_0) - f(r)]\left(\frac{d\alpha}{dr} + \frac{d\theta}{dr}\right) = f'(r)\cot\alpha.$$

En remplaçant dans cette équation $\frac{d\theta}{dr}$ par sa valeur déduite de

$$\cot\alpha = -r\frac{d\theta}{dr},$$

on trouve

$$2[f(r_0) - f(r)]\left(\sin\alpha\frac{d\alpha}{dr} - \frac{\cos\alpha}{r}\right) = f'(r)\cos\alpha.$$

Si l'on pose

$$\varphi'(r) = \frac{f'(r)}{2[f(r_0) - f(r)]} + \frac{1}{r},$$

il vient

$$\frac{d\cos\alpha}{dr} + \varphi'(r)\cos\alpha = 0;$$

d'où

$$\cos\alpha = Me^{-\varphi(r)}.$$

On déduit de là

$$\cot\alpha = \frac{Me^{-\varphi(r)}}{\sqrt{1 - M^2 e^{-2\varphi(r)}}} = -r\frac{d\theta}{dr};$$

d'où, en remarquant que $\theta = 0$ pour $r = r_0$,

$$\theta = M\int_r^{r_0} \frac{e^{-\varphi(r)}\,dr}{r\sqrt{1 - M^2 e^{-2\varphi(r)}}}.$$

Supposons, par exemple, que la force soit proportionnelle à la distance ou que $f(r)$ soit de la forme μr^2, nous avons

$$\varphi'(r) = \frac{1}{2(r_0 - r)} - \frac{1}{2(r_0 + r)} + \frac{1}{r},$$

d'où

$$\varphi(r) = \log\frac{r}{\sqrt{r_0^2 - r^2}},$$

et, successivement,

$$\cos\alpha = \frac{M\sqrt{r_0^2 - r^2}}{r},$$

$$r^2\sin^2\alpha = (1 + M^2)\left(r^2 - r_0^2\frac{M^2}{1 + M^2}\right).$$

La courbe est ainsi une hypocycloïde.

17. *Brachistochrone dans le cas d'un point pesant assujetti à rester sur une surface de révolution dont l'axe est vertical.* — Soit Ox l'axe de la surface, la position de l'origine restant arbitraire. On a

$$V = \sqrt{2g(x - x_0)},$$

$$\frac{\cos m}{\cos n} = \frac{y}{z}.$$

L'équation (m) du n° 14 donne

$$\frac{d\frac{1}{V}\frac{dy}{ds}}{d\frac{1}{V}\frac{dz}{ds}} = \frac{y}{z}$$

ou

$$z\frac{dy'\chi}{dx} = y\frac{dz'\chi}{dx}.$$

en posant $\chi = \frac{1}{\sqrt{(1+y'^2+z'^2)(x-x_0)}}$.

Si l'on développe le calcul, on trouve

$$\chi(y''z - z''y) + \frac{d\chi}{dx}(y'z - z'y) = 0$$

ou

$$\chi\frac{d}{dx}(y'z - z'y) + \frac{d\chi}{dx}(y'z - z'y) = 0.$$

On déduit de là, en désignant par C une constante,

$$\chi(y'z - z'y) = C.$$

En élevant au carré et remplaçant ensuite χ^2 par sa valeur, il vient

$$(n) \qquad (y'z - yz')^2 = C^2(1 + y'^2 + z'^2)(x - x_0).$$

Soient r la distance du mobile à l'axe Ox; θ l'angle qu'elle forme avec Oy ou Oz. On a

$$y'z - yz' = r^2\frac{d\theta}{dx}, \qquad y'^2 + z'^2 = \frac{r^2 d\theta^2 + dr^2}{dx^2};$$

par suite,

$$r^2[r^2 - C^2(x - x_0)]\frac{d\theta^2}{dx^2} - C^2\frac{dr^2}{dx^2}(x - x_0) = C^2(x - x_0),$$

et cette équation, jointe à celle

$$r = f(x)$$

de la surface, déterminera la courbe.

L'équation (n) peut encore se mettre sous la forme

$$r^4\frac{d\theta^2}{dt^2} = C^2\frac{ds^2}{dt^2}(x - x_0) = \frac{C^2}{2g}V^4,$$

d'où

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{CV^2}{\sqrt{2g}}.$$

CHAPITRE III.

DU MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL SUR UNE SURFACE.

18. Lorsqu'un point matériel m, dont la masse sera censée égale à l'unité, sollicité par une force extérieure F, est assujetti à se mouvoir sur une surface fixe, cette surface par sa rigidité détruit toute force qui lui est normale. Il suit de là que le point peut être considéré comme libre en faisant intervenir la *réaction* N de la surface, égale et contraire à la force détruite, réaction dont la valeur sera donnée par la solution du problème.

Soit

$$F(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

l'équation de la surface rapportée à trois axes rectangulaires.

Le mouvement du point sera complètement défini si l'on établit, entre ses coordonnées, deux relations dont l'une renfermera implicitement le temps et dont l'autre, indépendante de cette variable, déterminera avec l'équation (1) la forme de la trajectoire. Comme, dans ce qui suit, nous ne considérons que le cas où la force P dérive d'un potentiel φ, l'équation des forces vives

$$V^2 = 2\varphi + \text{const.} = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} \tag{2}$$

nous donnera la première de ces relations. Il s'agit d'obtenir la seconde, que, pour simplifier, nous appellerons *équation complémentaire*.

Soient

θ l'angle formé par la binormale à la trajectoire avec la normale à la surface ;

R le rayon de courbure de la section normale à la surface menée par la tangente à la trajectoire;

$\rho = R \sin\theta$ le rayon de courbure de la trajectoire;

$\rho' = R \operatorname{tang}\theta = \frac{\rho}{\cos\theta}$ son rayon de courbure géodésique;

P_t, P_N, P_q les composantes de F suivant la direction de la vitesse, celle de la normale à la surface et la perpendiculaire à la vitesse dans le plan tangent.

En nous reportant au n° 25 de la page 175 du tome I, nous avons, en faisant la part de quelques différences dans les notations,

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &N + \frac{V^2}{R} + P_N = 0,\\ &\frac{dV}{dt} - P_t = 0,\\ &\frac{V^2}{\rho}\cos\theta = \frac{V^2}{\rho'} = P_q. \end{aligned}\right.$$

La première de ces équations fera connaître N quand le problème sera résolu. Il n'y a pas lieu de tenir compte de la seconde, qui se déduit de l'équation (2). La troisième exprime que la composante P_q est égale à la force centrifuge géodésique, d'où le nom de *géodésique* donné à cette composante. On remarquera que, si la force extérieure est constamment normale à la surface ou si $P_q = 0$, la trajectoire est une ligne géodésique de la surface.

C'est la troisième des équations ci-dessus qui, convenablement transformée, nous donnera l'équation complémentaire.

Soient

$X = \frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $Y = \frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $Z = \frac{\partial\varphi}{\partial z}$ les composantes de la force P suivant Ox, Oy, Oz;

$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}$, $\cos\beta = \frac{dy}{ds}$, $\cos\gamma = \frac{dz}{ds}$ les cosinus des angles que forme V avec les axes;

$\cos l = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial F}{\partial x}$, $\cos m = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial F}{\partial y}$, $\cos n = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial F}{\partial z}$ les cosinus des

angles semblables relatifs à N, en posant

$$\Delta = \sqrt{\frac{\partial F^2}{\partial x^2} + \frac{\partial F^2}{\partial y^2} + \frac{\partial F^2}{\partial z^2}}.$$

On a

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = X + N \cos l,$$

ou

$$V \frac{dV \cos\alpha}{ds} = X + N \cos l$$

ou encore

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} & V^2 \frac{d \cos\alpha}{ds} + V \frac{dV}{ds} \cos\alpha = X + N \cos l, \\ & \text{et de même} \\ & V^2 \frac{d \cos\beta}{ds} + V \frac{dV}{ds} \cos\beta = Y + N \cos m, \\ & V^2 \frac{d \cos\gamma}{ds} + V \frac{dV}{ds} \cos\gamma = Z + N \cos n. \end{aligned} \right.$$

Menons par l'origine O les droites égales à l'unité ON, Ot, Oq respectivement parallèles à N, V, P_q. La droite Oq représentera le double de l'aire NOt, et comme $\cos l$, $\cos m$, $\cos n$ sont les coordonnées du point N et $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ celles du point t, on a, en projetant sur les plans xOy, yOz, zOx,

$$\begin{aligned} \cos(q, z) &= \cos m \cos\alpha - \cos l \cos\beta, \\ \cos(q, x) &= \cos n \cos\beta - \cos m \cos\gamma, \\ \cos(q, y) &= \cos l \cos\gamma - \cos n \cos\alpha. \end{aligned}$$

Comme $P_q = X \cos(q, x) + Y \cos(q, y) + Z \cos(q, z)$, en ajoutant les équations (4) multipliées respectivement par $\cos(q, x)$, $\cos(q, y)$, $\cos(q, z)$, on devra retomber sur l'équivalent de la troisième des équations (3), qui devra par suite être indépendante de N et même de $\frac{dV}{ds}$; et, en effet, on trouve, en effectuant les calculs,

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} & V^2 \left[(\cos\beta \cos n - \cos\gamma \cos m) \frac{d \cos\alpha}{ds} + \ldots \right] \\ & \quad = X(\cos\beta \cos n - \cos\gamma \cos m) + \ldots, \end{aligned} \right.$$

et en substituant à V^2, $\cos\alpha, \ldots, \cos l, \ldots, X, \ldots$ leurs valeurs

données plus haut, on aura l'équation complémentaire cherchée.

L'équation (2) fera ensuite connaître x, y, z en fonction de t.

En supposant $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$, l'équation (5) donne pour celle des lignes géodésiques de la surface

$$(6) \qquad (\cos\beta \cos n - \cos\gamma \cos m)\, d\cos\alpha + \ldots = 0.$$

19. *Sur une propriété des lignes géodésiques de l'ellipsoïde.* — Soit

$$(7) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

l'équation de l'ellipsoïde.

L'équation (6) se prête difficilement à la recherche de la propriété géométrique dont il s'agit. Il est préférable [1] de recourir aux équations (4) où l'on supposera $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$, $V = \text{const.}$, $\cos l = \frac{2x}{\Delta a^2}$, $\cos m = \frac{2y}{\Delta b^2}$, $\cos n = \frac{2z}{\Delta c^2}$, et, en faisant

$$\frac{N}{V^2 \Delta} = \frac{K}{2},$$

K étant substitué à l'inconnue N, on aura

$$(4') \qquad \frac{d\cos\alpha}{ds} = K\frac{x}{a^2}, \qquad \frac{d\cos\beta}{ds} = K\frac{y}{b^2}, \qquad \frac{d\cos\gamma}{ds} = K\frac{z}{c^2}.$$

En ajoutant ces équations après les avoir respectivement multipliées par $\frac{x}{a^2}$, $\frac{y}{b^2}$, $\frac{z}{c^2}$, on trouve

$$(8) \qquad \frac{x}{a^2}\frac{d\cos\alpha}{ds} + \frac{y}{b^2}\frac{d\cos\beta}{ds} + \frac{z}{c^2}\frac{d\cos\gamma}{ds} = K\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right).$$

Si l'on différentie deux fois de suite l'équation (7) par rapport

---

[1] L'analyse suivante, à quelques différences près, est empruntée à M. Darboux.

à s, on obtient

$$\frac{x}{a^2}\cos\alpha + \frac{y}{b^2}\cos\beta + \frac{z}{c^2}\cos\gamma = 0,$$

$$\frac{x}{a^2}\frac{d\cos\alpha}{ds} + \frac{y}{b^2}\frac{d\cos\beta}{ds} + \frac{z}{c^2}\frac{d\cos\gamma}{ds} = -\left(\frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\cos^2\beta}{b^2} + \frac{\cos^2\gamma}{c^2}\right),$$

et l'équation (8) devient

$$(8') \qquad \frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\cos^2\beta}{b^2} + \frac{\cos^2\gamma}{c^2} = -K\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right).$$

En ajoutant les équations (4') respectivement multipliées par

$$2\frac{ds\cos\alpha}{a^2} = 2\frac{dx}{a^2}, \qquad 2\frac{ds\cos\beta}{b^2} = 2\frac{dy}{b^2}, \qquad 2\frac{ds\cos\gamma}{c^2} = 2\frac{dz}{c^2},$$

on trouve

$$(9) \qquad \frac{d\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{d\cos^2\beta}{b^2} + \frac{d\cos^2\gamma}{c^2} = K\left(\frac{dx^2}{a^4} + \frac{dy^2}{b^4} + \frac{dz^2}{c^4}\right),$$

et, en éliminant K entre les équations (9) et (8'), il vient

$$\frac{\dfrac{d\cos^2\alpha}{a^2} + \dfrac{d\cos^2\beta}{b^2} + \dfrac{d\cos^2\gamma}{c^2}}{\dfrac{\cos^2\alpha}{a^2} + \dfrac{\cos^2\beta}{b^2} + \dfrac{\cos^2\gamma}{c^2}} = -\frac{\dfrac{dx^2}{a^4} + \dfrac{dy^2}{b^4} + \dfrac{dz^2}{c^4}}{\dfrac{x^2}{a^4} + \dfrac{y^2}{b^4} + \dfrac{z^2}{c^4}},$$

équation dont les deux membres s'intègrent et qui donne

$$(10) \qquad \left(\frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\cos^2\beta}{b^2} + \frac{\cos^2\gamma}{c^2}\right)\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right) = \text{const.}$$

Soient P la distance du centre de l'ellipsoïde au plan tangent au point (x, y, z) de la ligne géodésique, D le diamètre de la surface parallèle à la tangente à la courbe. On a d'abord

$$P = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{x^2}{a^4} + \dfrac{y^2}{b^4} + \dfrac{z^2}{c^4}}}.$$

Pour obtenir D, il suffit de faire $x = \frac{D}{2}\cos\alpha$, $y = \frac{D}{2}\cos\beta$,

$z = \frac{D}{2}\cos\gamma$ dans l'équation (7), qui donne ainsi

$$D = \frac{2}{\sqrt{\frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\cos^2\beta}{b^2} + \frac{\cos^2\gamma}{c^2}}},$$

et l'équation (10) devient

$$(11) \qquad DP = \text{const.}\,C,$$

relation qui, traduite en langage ordinaire, constitue le théorème de Joachimsthal.

En ayant égard aux valeurs ci-dessus de P et D, l'équation (8′) prend la forme

$$K = -\frac{4P^2}{D^2},$$

et les formules (4′) deviennent

$$\frac{d\cos\alpha}{ds} = -\frac{4P^2}{D^2}\frac{x}{a^2}, \qquad \frac{d\cos\beta}{ds} = -\frac{4P^2}{D^2}\frac{y}{b^2}, \qquad \frac{d\cos\gamma}{ds} = -\frac{4P^2}{D^2}\frac{z}{c^2};$$

d'où, pour la courbure de la ligne géodésique,

$$(12) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{\rho} &= \frac{\sqrt{(d\cos\alpha)^2 + (d\cos\beta)^2 + (d\cos\gamma)^2}}{ds} \\ &= \frac{4P^2}{D^2}\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}} = \frac{4P}{D^2}. \end{aligned}\right.$$

En éliminant D entre cette équation et l'équation (11), on obtient

$$(13) \qquad \rho = \frac{C^2}{4P^3},$$

résultat qu'il est facile de traduire en langage ordinaire [1].

Considérons un ellipsoïde de révolution autour de Ox, et faisons passer le plan xOy par le point considéré de la ligne géodésique. On a

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

---

[1] On peut arriver immédiatement aux formules (12) et (11) de la manière suivante. En exprimant l'égalité des cosinus des angles formés avec les axes par la normale principale à la courbe et par la normale à la surface,

et, pour le rayon de courbure en (x, y) de la section méridienne,

$$R = \frac{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4} = a^2 b^2 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{a^2 b^2}{P^3},$$

d'où, en le reportant à l'équation (12),

$$\frac{\rho}{R} = \text{const.}$$

Donc, en chaque point d'une ligne géodésique d'un ellipsoïde de révolution, le rapport du rayon de courbure au rayon de courbure de la section méridienne passant par ce point est constant (théorème de Gudermann).

20. *Sur une propriété des lignes géodésiques d'une surface de révolution.* — Soient

Oy l'axe de révolution;

---

on retombe sur les formules (4'), qui entraînent comme conséquence la formule (8'), laquelle revient à la suivante :

$$(a) \qquad \frac{4}{D^2} = -\frac{K}{P^2}.$$

En ajoutant les carrés des valeurs (4'), on obtient

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{K^2}{P^2},$$

et, en éliminant K au moyen de (a), on retrouve la relation (12).

On a maintenant

$$(b) \qquad \frac{1}{P}\frac{dP}{ds} = -P^2\left(\frac{x}{a^4}\cos\alpha + \frac{y}{b^4}\cos\beta + \frac{z}{c^4}\cos\gamma\right),$$

puis

$$\frac{1}{D^2}\frac{dD}{ds} = -\frac{1}{4}\left(\frac{\cos\alpha}{a^2}\frac{d\cos\alpha}{ds} + \frac{\cos\beta}{b^2}\frac{d\cos\beta}{ds} + \frac{\cos\gamma}{c^2}\frac{d\cos\gamma}{ds}\right)$$
$$= -\frac{K}{4}\left(\frac{x}{a^4}\cos\alpha + \frac{y}{b^4}\cos\beta + \frac{z}{c^4}\cos\gamma\right)$$

ou, en éliminant K au moyen de (a),

$$(c) \qquad \frac{1}{D}\frac{dD}{ds} = P^2\left(\frac{x}{a^4}\cos\alpha + \frac{y}{b^4}\cos\beta + \frac{z}{c^4}\cos\gamma\right).$$

En ajoutant (b) et (c) et intégrant, on arrive à la formule (11).

m l'intersection d'une ligne géodésique déterminée avec une courbe méridienne quelconque;

$R' = \overline{mN}$ la portion de la normale à cette courbe limitée à Oy;

R le rayon de courbure de la même courbe, considéré comme positif ou négatif selon qu'il sera dirigé de m vers N ou en sens inverse;

α l'inclinaison en m de la ligne géodésique sur la méridienne;

Ox un axe compris dans le plan yNm perpendiculaire à Oy, l'origine O pouvant être choisie à volonté;

ρ le rayon de courbure de la ligne géodésique dont le signe déterminera le sens.

Nous avons d'abord la formule connue

$$(1) \qquad \frac{\cos^2\alpha}{R} + \frac{\sin^2\alpha}{R'} = \frac{1}{\rho}.$$

Nous considérerons la ligne géodésique comme étant décrite par un point m assujetti à rester sur la surface sans être sollicité par une force extérieure. La vitesse V du point, qui est constante, se décompose en deux autres : l'une, $V\cos\alpha$, suivant la méridienne ; l'autre, $V\sin\alpha$, suivant la tangente au parallèle. Comme la réaction normale de la surface est la seule force à laquelle m est soumis et que sa direction rencontre l'axe Oy, le principe des aires s'applique à la projection de m sur le plan du parallèle, et l'on a

$$V\sin\alpha . x = \text{const.}$$

ou

$$(2) \qquad x\sin\alpha = \text{const.}\, k,$$

la constante k étant déterminée par les valeurs x_0, α_0 de x, α qui correspondent au point de départ de la ligne géodésique.

En éliminant α entre les équations (1) et (2), on trouve

$$(3) \qquad \frac{x^2}{R} + k^2\left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R}\right) = \frac{x^2}{\rho},$$

d'où l'on déduira ρ.

Application aux surfaces de révolution du second degré :

1° *Ellipsoïde,* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. — On trouve facilement

$$(a) \qquad \frac{1}{R} = \frac{a^4 b^4}{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$(b) \qquad \frac{1}{R'} = \frac{b^2}{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^{\frac{1}{2}}},$$

d'où

$$(c) \qquad \frac{1}{R} - \frac{1}{R'} = \frac{b^2(a^4 y^2 + b^4 x^2 - a^4 b^4)}{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Si l'on élimine y^2 au numérateur de (c) au moyen de l'équation de l'ellipse et que l'on ait égard à la valeur (a), on trouve

$$\frac{1}{R'} - \frac{1}{R} = \frac{b^4(b^2 - a^2)x^2}{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a^4}\,\frac{(b^2 - a^2)x^2}{R}.$$

En portant cette valeur dans l'équation (3), il vient

$$(4) \qquad \frac{1}{R}\left[1 + k^2\,\frac{b^2 - a^2}{a^4}\right] = \frac{1}{\rho},$$

ce qui est l'expression du théorème de Gudermann.

2° *Paraboloïde.* — Si l'on pose $\frac{a^2}{b} = p$, que l'on porte la valeur de b déduite de cette relation dans la formule (4), que l'on fasse ensuite $a = \infty$, p restant fini, on trouve

$$(4') \qquad \frac{1}{R}\left(1 + \frac{k^2}{p}\right) = \frac{1}{\rho}.$$

3° *Hyperboloïde à une nappe,* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. — Il faut remplacer b^2 par $-b^2$ dans les formules (a) et (b), puis R par $-$R, et l'on obtient facilement

$$(4'') \qquad \frac{1}{R}\left(1 - k^2\,\frac{a^2 + b^2}{a^4}\right) = \frac{1}{\rho}.$$

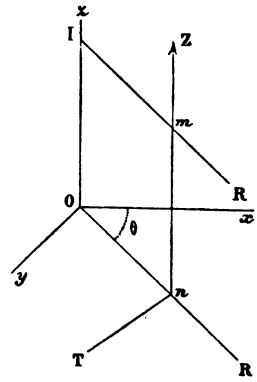
4° *Hyperboloïde à deux nappes,* $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. — Il suffira, dans la formule (4), de remplacer a^2 par $-a^2$.

Ainsi donc, le théorème de Gudermann s'étend à toutes les surfaces de révolution du second degré.

La formule (3) conduit à des résultats intéressants quand on suppose que la surface est un tore ou qu'elle est engendrée par une cycloïde, une chaînette, etc.

21. *Équations en coordonnées cylindriques du mouvement d'un point matériel sur une surface.* — Soient (*fig.* 5)

Fig. 5.



Ox, Oy, Oz trois axes rectangulaires fixes;
$r = mI$ la distance du mobile m à Oz;
n la projection de m sur le plan xOy;
θ l'angle nOx;
$\overline{mR}$, $\overline{nR}$ les prolongements de Im, On;
nT la perpendiculaire en n à On menée dans le sens de l'accroissement de θ;
R, T, Z les composantes suivant nR, nT, Oz de la force extérieure qui agit sur m;

$$F(r, \theta, z) = 0 \tag{1}$$

l'équation de la surface;
N la réaction de cette surface sur m;
l, m, n les angles formés par la direction de N avec nR, nT, OZ.

On a, pour un déplacement virtuel de m sur la surface

$$N\cos l.\delta r + N\cos m.r\,\delta\theta + N\cos n.\delta z = 0$$

ou

$$\cos l.\delta r + \cos m.r\,\delta\theta + \cos n.\delta z = 0.$$

On a d'ailleurs

$$\frac{\partial F}{\partial r}\delta r + \frac{\partial F}{\partial \theta}\delta\theta + \frac{\partial F}{\partial z}\delta z = 0.$$

En comparant entre elles les deux dernières équations que l'on vient d'écrire et en posant

$$\Delta = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2},$$

on trouve

$$(a) \qquad \cos l = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial F}{\partial r}, \qquad \cos m = \frac{1}{\Delta r}\frac{\partial F}{\partial \theta}, \qquad \cos n = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial F}{\partial z}.$$

On a d'abord

$$(2) \qquad \frac{d^2 z}{dt^2} = Z + N\cos n.$$

En prenant les moments par rapport à Oz, on trouve

$$(3) \qquad \frac{dr^2\dfrac{d\theta}{dt}}{dt} = (T + N\cos m)r.$$

Enfin l'équation des forces vives donne

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{dr^2}{dt^2} + r^2\frac{d\theta^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}\right) = R\frac{dr}{dt} + Tr\frac{d\theta}{dt} + Z\frac{dz}{dt}$$

ou, en développant et en ayant égard à la relation (2),

$$\frac{dr}{dt}\frac{d^2r}{dt^2} + r\frac{d\theta}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\frac{dr}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right) = R\frac{dr}{dt} + Tr\frac{d\theta}{dt} - N\cos n\frac{dz}{dt}.$$

Si, dans cette équation, on remplace Tr par sa valeur déduite de l'équation (3), on obtient

$$\frac{dr}{dt}\frac{d^2r}{d\theta^2} - r\frac{d\theta^2}{dt^2}\frac{dr}{dt} = R\frac{dr}{dt} - N\left(r\cos m\frac{d\theta}{dt} + \cos n\frac{dz}{dt}\right)$$

ou, simplement,

$$(4) \qquad \frac{d^2 r}{dt^2} = \mathrm{R} + r\frac{d\theta^2}{dt^2} + \mathrm{N}\cos l.$$

Dans le cas où la force extérieure dérive d'un potentiel Ψ, on a

$$\mathrm{R}\,dr + \mathrm{T}r\,d\theta + \mathrm{Z}\,dz = \frac{\partial\Psi}{\partial r}dr + \frac{\partial\Psi}{\partial\theta}d\theta + \frac{\partial\Psi}{\partial z}dz,$$

d'où

$$\mathrm{R} = \frac{\partial\Psi}{\partial r}, \qquad \mathrm{T} = \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}, \qquad \mathrm{Z} = \frac{\partial\Psi}{\partial z},$$

et à l'une des équations (2), (3), (4) on pourra substituer la suivante :

$$(4') \qquad \mathrm{V}^2 = \frac{dr^2 + r^2\,d\theta^2 + dz^2}{dt^2} = 2\Psi + \text{const.C}.$$

Soient

$$ds = \sqrt{dr^3 + r^2\,d\theta^2 + dz^2}$$

l'élément d'arc de la trajectoire de m;

$$\cos\alpha = \frac{dr}{ds}, \qquad \cos\beta = r\frac{d\theta}{ds}, \qquad \cos\gamma = \frac{dz}{ds}$$

les cosinus des angles formés par la tangente à cette courbe avec les directions de R, T, Z.

En faisant dans les équations (2), (3) et (4)

$$\frac{dz}{dt} = \mathrm{V}\cos\gamma, \qquad r\frac{d\theta}{dt} = \mathrm{V}\cos\beta, \qquad \frac{dr}{dt} = \mathrm{V}\cos\alpha, \qquad \frac{d}{dt} = \mathrm{V}\frac{d}{ds},$$

ces équations deviennent

$$\mathrm{V}^2\frac{d\cos\gamma}{ds} + \mathrm{V}\frac{d\mathrm{V}}{ds}\cos\gamma = \mathrm{Z} + \mathrm{N}\cos n,$$

$$\mathrm{V}^2\frac{d\cos\beta}{ds} + \mathrm{V}\frac{d\mathrm{V}}{ds}\cos\beta + \frac{\mathrm{V}^2}{r}\cos\alpha\cos\beta = \mathrm{T} + \mathrm{N}\cos m,$$

$$\mathrm{V}^2\frac{d\cos\alpha}{ds} + \mathrm{V}\frac{d\mathrm{V}}{ds}\cos\alpha - \frac{\mathrm{V}^2}{r}\cos^2\beta = \mathrm{R} + \mathrm{N}\cos l.$$

Soient λ_1, μ_1, ν_1 les angles formés par la composante géodésique de la force extérieure avec les directions de R, T, Z.

Si l'on remarque que

$$\cos\alpha\cos\lambda_1 + \cos\beta\cos\mu_1 + \cos\gamma\cos\nu_1 = 0,$$
$$\cos l\cos\lambda_1 + \cos m\cos\mu_1 + \cos n\cos\nu_1 = 0.$$

on obtient, en ajoutant les équations ci-dessus respectivement multipliées par $\cos\nu_1$, $\cos\mu_1$, $\cos\lambda_1$ pour l'équation complémentaire,

$$V^2\left(\cos\lambda_1\frac{d\cos\alpha}{ds} + \cos\mu_1\frac{d\cos\beta}{ds} + \cos\nu_1\frac{d\cos\gamma}{ds}\right)$$
$$+\frac{V^2}{r}(\cos\alpha\cos\mu_1 - \cos\beta\cos\lambda_1)\cos\beta = R\cos\lambda_1 + T\cos\mu_1 + Z\cos\nu_1.$$

Le n° 18 nous donne

$$\cos\mu_1 = \cos l\cos\gamma - \cos n\cos\alpha,$$
$$\cos\lambda_1 = \cos n\cos\beta - \cos m\cos\gamma,$$

d'où

$$\cos\alpha\cos\mu_1 - \cos\beta\cos\lambda_1$$
$$= -\cos n(\cos^2\alpha + \cos^2\beta) + \cos\gamma(\cos m\cos\beta + \cos l\cos\alpha),$$

et, comme

$$\cos m\cos\beta + \cos l\cos\alpha = -\cos n\cos\gamma,$$

l'expression précédente se réduit à $-\cos n$. L'équation complémentaire prend ainsi cette forme relativement simple

$$(5)\left\{\begin{aligned} &V^2\left(\cos\lambda_1\frac{d\cos\alpha}{ds} + \cos\mu_1\frac{d\cos\beta}{ds} + \cos\nu_1\frac{d\cos\gamma}{ds}\right) - \frac{V^2}{r}\cos n\cos\beta \\ &= R\cos\lambda_1 + T\cos\mu_1 + Z\cos\nu_1. \end{aligned}\right.$$

22. *Mouvement d'un point matériel sur une surface de révolution.* — Soit Oz l'axe de révolution. L'équation (1) se réduit à la forme

$$(1') \qquad F(r, z) = 0,$$

et l'on a

$$m = 90°.$$

Comme on n'a aucun intérêt à calculer N, il suffit de con-

sidérer les équations (3) et (4′) qui deviennent

$$(6)\quad \begin{cases} \omega \dfrac{d\omega r^2}{d\theta} = \dfrac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \\ \omega^2 \left[\dfrac{dr^2}{d\theta^2} + \dfrac{dz^2}{d\theta^2} + r^2\right] = 2\Psi + C, \end{cases}$$

en posant

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}.$$

On obtiendra l'équation complémentaire en éliminant ω entre les équations (6).

Si la force extérieure rencontre constamment l'axe Oz ou si elle reste parallèle à cet axe, on a

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = 0,$$

et la première des équations (6) devient

$$(7)\qquad \omega = \frac{A}{r^2},$$

A étant une constante.

Dans le cas où le mobile n'est soumis à l'action d'aucune force extérieure, la seconde des équations (6), eu égard à la valeur ci-dessus de ω, se réduit à la suivante

$$\frac{1}{r^4}\left(\frac{dr^2}{d\theta^2} + \frac{dz^2}{d\theta^2} + r^2\right) = \text{const.}\,H,$$

qui, jointe à l'équation (1′), déterminera les lignes géodésiques de la surface.

23. *Mouvement sur un hélicoïde gauche d'un point soumis à l'action d'une force perpendiculaire à l'axe* Oz *et fonction de la distance* r *à cet axe.* — Le potentiel $\Psi(r)$ sera positif ou négatif, selon que la force sera répulsive ou attractive.

En désignant par h une constante donnée, on a, pour l'équation de la surface,

$$z - h\theta = 0,$$

d'où

$$\cos l = 0, \qquad \cos m = -\frac{h}{r\Delta}, \qquad \cos n = \frac{1}{\Delta}.$$

Les équations (2) et (3) deviennent

$$\frac{h\,d\omega}{dt} = \frac{N}{\Delta},$$

$$\frac{d\omega r^2}{dt} = -\frac{Nh}{\Delta};$$

d'où, par l'élimination de N,

$$d.\omega(r^2 + h^2) = 0,$$

et, en désignant par A une constante,

$$\omega = \frac{A}{r^2 + h^2}. \tag{8}$$

L'équation (4'), mise sous la forme

$$\omega^2\left(\frac{dr^2}{d\theta^2} + \frac{dz^2}{d\theta^2} + r^2\right) = 2\Psi(r) + C,$$

devient

$$\frac{A^2}{(r^2 + h^2)^2}\left(\frac{dr^2}{d\theta^2} + h^2 + r^2\right) = 2\Psi(r) + C,$$

d'où θ est fonction de r par une quadrature.

En supposant $\Psi = 0$ et posant $\frac{C}{A^2} = B$, on a, pour l'équation différentielle des lignes géodésiques de l'hélicoïde,

$$d\theta = \pm \frac{dr}{\sqrt{[B(r^2 + h^2) - 1](r^2 + h^2)}},$$

dont l'intégrale dépend des fonctions elliptiques.

24. *Développements en séries des formules du mouvement du pendule conique.* — Soient

l la longueur du pendule;

θ l'angle qu'il forme, dans une position quelconque, avec la verticale;

φ l'angle correspondant formé par le plan du pendule et de la verticale de suspension avec la position qu'occupait ce plan à l'origine du temps;

θ_0 l'écart initial du pendule par rapport à la verticale, et qui est censé un maximum;

θ_1 le minimum de θ;

$k^2 = \frac{g}{l}$.

Nous avons trouvé au n° 27 du Tome I, p. 180,

$$(1)\quad dt = \pm \frac{d\cos\theta}{k\sqrt{2}\sqrt{(\cos\theta - \cos\theta_0)(\cos\theta_1 - \cos\theta)\left(\cos\theta + \frac{1+\cos\theta_0\cos\theta_1}{\cos\theta_0 + \cos\theta_1}\right)}},$$

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} d\varphi &= k\sqrt{2}\,\frac{\sin\theta_0\sin\theta_1}{\sqrt{\cos\theta_0+\cos\theta_1}}\,\frac{dt}{\sin^2\theta} \\ &= k\,\frac{\sin\theta_0\sin\theta_1}{\sqrt{2}\sqrt{\cos\theta_0+\cos\theta_1}}\left(\frac{1}{1+\cos\theta} + \frac{1}{1-\cos\theta}\right)dt. \end{aligned}\right.$$

Posons

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \cos\theta &= \cos\theta_0\cos^2\psi + \cos\theta_1\sin^2\psi \\ &= \frac{1}{2}[\cos\theta_0 + \cos\theta_1 - (\cos\theta_1 - \cos\theta_0)\cos 2\psi], \end{aligned}\right.$$

ψ étant une variable croissante que nous substituerons à θ. Nous remarquerons d'abord que nous avons

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\theta = \theta_0 \quad \text{pour } \psi = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ \ldots, \\ &\theta = \theta_1 \quad \text{pour } \psi = \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{5}{2}\pi,\ \ldots. \end{aligned}\right.$$

Nous avons ensuite

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\cos\theta - \cos\theta_0 = (\cos\theta_1 - \cos\theta_0)\sin^2\psi, \\ &\cos\theta_1 - \cos\theta = (\cos\theta_1 - \cos\theta_0)\cos^2\psi, \\ &\cos\theta + \frac{1+\cos\theta_0\cos\theta_1}{\cos\theta_0+\cos\theta_1} \\ &\quad = \frac{2 + 4\cos\theta_0\cos\theta_1 + \cos^2\theta_0 + \cos^2\theta_1 - (\cos^2\theta_1 - \cos^2\theta_0)\cos 2\psi}{2(\cos\theta_0 + \cos\theta_1)}, \\ &d\cos\theta = 2(\cos\theta_1 - \cos\theta_0)\sin\psi\cos\psi\,d\psi. \end{aligned}\right.$$

Si l'on pose

$$(6)\qquad M = \frac{\cos\theta_0 + \cos\theta_1}{2 + 4\cos\theta_0\cos\theta_1 + \cos^2\theta_0 + \cos^2\theta_1};$$

la formule (1) devient

$$(7)\qquad dt = \frac{2}{k}\sqrt{M}\frac{d\psi}{\sqrt{1 - M(\cos\theta_1 - \cos\theta_0)\cos 2\psi}}.$$

Avant d'aller plus loin, nous ferons remarquer que, en faisant varier $\cos\theta_0$, $\cos\theta_1$, la fonction M atteint son maximum $\frac{1}{6}\sqrt{3}$ pour $\cos\theta_0 = \cos\theta_1 = \frac{1}{3}\sqrt{3}$, de sorte que la valeur de cette fonction est toujours inférieure à l'unité.

Si nous posons maintenant

$$(8)\qquad \begin{cases} \cos\theta_0 = 1 - a_0, & \cos\theta_1 = 1 - a_1, \\ u = a_0 + a_1, & v = a_0 - a_1, \end{cases}$$

la valeur (7) prend la forme

$$(9)\qquad dt = \frac{2}{k}\sqrt{M}\frac{d\psi}{\sqrt{1 - Mv\cos^2\psi}}.$$

En posant encore

$$(10)\qquad N = \sqrt{2M}\frac{\sin\theta_0\sin\theta_1}{\sqrt{\cos\theta_0 + \cos\theta_1}},$$

l'expression (2) prend aussi la forme

$$(11)\qquad d\varphi = N\left(\frac{1}{1 - \cos\theta} + \frac{1}{1 + \cos\theta}\right)\frac{d\psi}{\sqrt{1 - Mv\cos 2\psi}}.$$

Si l'on pose

$$(12)\qquad A_n = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots n}\frac{M^n}{2^n},$$

on a

$$(13)\qquad (1 - Mv\cos 2\psi)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \Sigma_1 A_n v^n \cos^n 2\psi,$$

ou, en remplaçant les puissances de $\cos 2\psi$ par leurs expressions en cosinus d'arcs multiples de 2ψ,

$$(14)\qquad (1 - M\rho\cos 2\psi)^{-\frac{1}{2}} = \Sigma_0 P_n \rho^n \cos 2n\psi,$$

en prenant

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned}
P_0 &= 1 + \frac{1}{2}A_2\rho^2 + \frac{3}{4}A_4\rho^4 + \frac{5}{8}A_6\rho^6 + \ldots,\\
P_1 &= A_1 + \frac{3}{4}A_3\rho^2 + \frac{5}{8}A_5\rho^4 + \frac{35}{64}A_7\rho^6 + \ldots,\\
P_2 &= \frac{1}{2}A_2 + \frac{1}{2}A_4\rho^2 + \frac{15}{32}A_6\rho^4 + \ldots,\\
P_3 &= \frac{1}{4}A_3 + \frac{5}{16}A_5\rho^2 + \frac{21}{64}A_7\rho^4 + \ldots,\\
P_4 &= \frac{1}{8}A_4 + \frac{3}{16}A_6\rho^2 + \ldots,\\
P_5 &= \frac{1}{16}A_5 + \frac{7}{64}A_7\rho^2 + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

En ayant égard au développement (14), la formule (9) donne par l'intégration

$$(16)\qquad t = \frac{2}{k}\sqrt{M}\left(P_0\psi + \frac{1}{2}\sum_1 \frac{P_n}{n}\rho^n \sin 2n\psi\right).$$

Si nous désignons par τ et T les durées respectives du passage d'un maximum de θ au minimum et au minimum suivant, correspondant si l'on veut à $\psi = \frac{\pi}{2}$, $\psi = \pi$, nous avons

$$(17)\qquad \tau = \frac{\pi P_0}{k}\sqrt{M}, \qquad T = 2\tau.$$

Occupons-nous maintenant de l'angle azimutal φ. Nous remarquerons d'abord que

$$(18)\qquad \cos\theta = 1 - a_0\cos^2\psi - a_1\sin^2\psi = 1 - \frac{1}{2}(u + \rho\cos 2\psi),$$

et nous aurons, en ayant égard à la formule (13) et effectuant une division,

$$\frac{1}{1-\cos\theta}\,\frac{1}{\sqrt{1-M\rho\cos 2\psi}}$$

$$= \frac{1}{a_0\cos^2\psi + a_1\sin^2\psi} + \frac{2}{\rho}\sum_1 \frac{A_n\rho^n\cos^n 2\psi}{\cos 2\psi + \frac{u}{\rho}}$$

$$= \frac{1}{a_0\cos^2\psi + a_1\sin^2\psi} + \frac{2}{\rho}\sum_1 A_n\rho^n$$

$$\times\left[\cos^{n-1}2\psi - \frac{u}{\rho}\cos^{n-2}2\psi + \ldots + (-1)^{n-1}\left(\frac{u}{\rho}\right)^{n-1} + \frac{(-1)^n\left(\frac{u}{\rho}\right)^n}{\cos 2\psi + \frac{u}{\rho}}\right]$$

$$= \frac{1+\Sigma_1 A_n(-u)^n}{a_0\cos^2\psi + a_1\sin^2\psi} + 2\Sigma_1 A_n[\rho^{n-1}\cos^{n-1}2\psi - \ldots + (-u)^{n-1}].$$

Si l'on remplace les puissances des cosinus par leurs valeurs en fonction des cosinus des arcs multiples de 2ψ, et si l'on pose

$$\left\{\begin{aligned}
Q_0 &= 2(A_1 - A_2u\ldots) + (A_3 - A_4u + A_5u^2 - \ldots)\rho^2 \\
&\quad + \frac{3}{2}(A_5 - A_6u + \ldots)\rho^4 + \frac{5}{4}(A_7 - A_9u + \ldots)\rho^6 + \ldots, \\
Q_1 &= 2(A_2 - A_3u + \ldots) + \frac{3}{2}(A_4 - A_5u + \ldots)\rho^2 + \frac{5}{4}(A_6 - A_7u + \ldots)\rho^4 + \ldots, \\
Q_2 &= A_3 - A_4u + \ldots + (A_5 - A_6u + \ldots)\rho^2 + \frac{15}{16}(A_7 - A_8u + \ldots)\rho^4 + \ldots, \\
Q_3 &= \frac{1}{2}(A_4 - A_5u + \ldots) + \frac{5}{8}(A_6 - A_7u + \ldots)\rho^2 + \ldots, \\
Q_4 &= \frac{1}{4}(A_5 - A_6u + \ldots) + \frac{3}{8}(A_7 - A_8u + \ldots)\rho^2 + \ldots,
\end{aligned}\right.$$

on obtient

$$(a)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{(1-\cos\theta)\sqrt{1-M\rho\cos 2\psi}} \\
&\quad = \frac{1+\Sigma_1 A_n(-u)^n}{a_0^2\cos^2\psi + a_1\sin^2\psi} + Q_0 + \Sigma_1 Q_n\rho^n\cos 2n\psi.
\end{aligned}\right.$$

On a maintenant

$$\frac{1}{(1+\cos\theta)\sqrt{1-M\rho\cos 2\psi}}$$
$$= \frac{2}{(4-u)\left(1-\frac{\rho}{4-u}\cos 2\psi\right)}(1+\Sigma_1 A_n \rho^n \cos^n 2\psi)$$
$$= \frac{2}{4-u}\left[1+\frac{\rho}{4-u}\cos 2\psi+\left(\frac{\rho}{4-u}\right)^2\cos^2 2\psi+\ldots\right][1+\Sigma_1 A_n \rho^n \cos^n 2\psi].$$

Si l'on pose

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned}
\chi_n &= \frac{1}{(4-u)^n}+\frac{A_1}{(4-u)^{n-1}}+\ldots+A_n,\\
R_0 &= \frac{1}{4-u}\left(2+\chi_2\rho^2+\frac{3}{2}\chi_4\rho^4+\frac{5}{4}\chi_6\rho^6+\ldots\right),\\
R_1 &= \frac{1}{4-u}\left(2\chi_1+\frac{3}{2}\chi_3\rho^2+\frac{5}{4}\chi_5\rho^4+\ldots\right),\\
R_2 &= \frac{1}{4-u}(\chi_2+\chi_4\rho^2+\ldots),\\
R_3 &= \frac{1}{4-u}\left(\chi_3+\frac{5}{4}\chi_5\rho^2+\ldots\right),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

il vient

$$(a')\qquad \frac{1}{(1+\cos\theta)\sqrt{1-M\rho\cos 2\psi}} = R_0+\Sigma_1 R_n \rho^n \cos 2n\psi.$$

En portant les valeurs (a) et (a') dans la formule (11), on trouve

$$\frac{d\varphi}{d\psi} = N\left[\frac{1+\Sigma_1 A_n(-u)^n}{a_0\cos^2\psi+a_1\sin^2\psi}+(Q_0+R_0)+\Sigma_1(Q_n+R_n)\rho^n\cos 2n\psi\right],$$

d'où

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned}
\varphi = N\Bigg[&\frac{1+\Sigma_1 A_n(-u)^n}{\sqrt{a_0 a_1}}\operatorname{arc\,tang}\left(\sqrt{\frac{a_1}{a_0}}\operatorname{tang}\psi\right)\\
&+(Q_0+R_0)\psi+\frac{1}{2}\sum\nolimits_1(Q_n+R_n)\frac{\rho^n\sin 2n\psi}{n}\Bigg].
\end{aligned}\right.$$

Soient φ_1, φ_2, φ_3, ... les valeurs de φ correspondant à

$\psi = \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, \ldots$, c'est-à-dire au premier minimum de θ, au second maximum, etc.; on a

$$\varphi_1 = N\frac{\pi}{2}\left[\frac{1+\Sigma_1 A_n(-u)^n}{\sqrt{a_0 a_1}} + Q_0 + R_0\right], \quad \varphi_2 = 2\varphi_1, \quad \varphi_3 = 3\varphi_1, \quad \ldots.$$

Il suit de là que la différence des azimuts d'un minimum et du maximum suivant est constante.

Cas de faibles écarts. — Supposons que θ_0 soit assez petit pour qu'on puisse prendre les puissances de θ d'un degré supérieur au second. Nous aurons

$$\cos\theta_0 = 1 - \frac{\theta_0^2}{2}, \qquad \cos\theta_1 = 1 - \frac{\theta_1^2}{2},$$

$$\cos^2\theta_0 = 1 - \theta_0^2, \qquad \cos^2\theta_1 = 1 - \theta_1^2,$$

$$a_0 = \frac{\theta_0^2}{2}, \qquad a_1 = \frac{\theta_1^2}{2}, \qquad u = \frac{\theta_0^2 + \theta_1^2}{2}, \qquad v = \frac{\theta_0^2 - \theta_1^2}{2},$$

$$\sqrt{M} = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{16}(\theta_0^2 + \theta_1^2)\right].$$

La formule (16) se réduit à

$$t = \frac{2}{k}\sqrt{M}\left[P_0\psi + \frac{1}{4}P_1(\theta_0^2 - \theta_1^2)\sin 2\psi\right].$$

Les formules (15) donnent, au degré d'approximation convenu,

$$P_0 = 1, \qquad P_1 = A_1;$$

d'ailleurs, d'après la formule (12), on a $A_1 = \frac{M}{2}$; par suite,

$$(22) \quad \left\{\begin{aligned} t &= \frac{2}{k}\sqrt{M}\left[\psi + \frac{M}{8}(\theta_0^2 - \theta_1^2)\sin 2\psi)\right] \\ &= \frac{1}{k}\left[\left(\psi + \frac{\theta_0^2 + \theta_1^2}{16}\right)\psi + \frac{\theta_0^2 - \theta_1^2}{32}\sin 2\psi\right]. \end{aligned}\right.$$

On déduit de là, pour $\psi = \frac{\pi}{2}$,

$$\tau = \frac{\pi}{2k}\left(1 + \frac{\theta_0^2 + \theta_1^2}{16}\right) = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\theta_0^2 + \theta_1^2}{16}\right).$$

Nous avons maintenant

$$N = \sqrt{2M}\,\frac{\theta_0\theta_1}{\sqrt{2}} = \frac{\theta_0\theta_1}{2},$$

$$\varphi = \frac{\theta_0\theta_1}{2}\left[\frac{1}{\frac{\theta_0\theta_1}{2}}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\operatorname{tang}\psi\right) + (Q_0 + R_0)\psi\right].$$

On devra faire, dans cette formule,

$$Q_0 = 2A_1 = M = \frac{1}{4}, \qquad R_0 = \frac{2}{4-u} = \frac{1}{2},$$

et l'on aura, par suite,

$$\varphi = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\operatorname{tang}\psi\right) + \frac{3}{8}\theta_0\theta_1\psi. \tag{23}$$

L'équation (3) donne

$$\theta^2 = \theta_0^2\cos^2\psi + \theta_1^2\sin^2\psi,$$

d'où

$$\operatorname{tang}\psi = \sqrt{\frac{\theta_0^2 - \theta^2}{\theta^2 - \theta_1^2}}. \tag{24}$$

On déduit de l'équation (22), aux termes du second ordre près, $\psi = kt$, valeur que l'on peut substituer dans le second terme de φ, et l'on a aussi

$$\varphi = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\operatorname{tang}\psi\right) + \frac{3}{8}\theta_0\theta_1 kt.$$

Si l'on pose

$$\varphi' = \varphi - \frac{3}{8}\theta_0\theta_1 kt,$$

il vient

$$\operatorname{tang}\varphi' = \frac{\theta_1}{\theta_0}\sqrt{\frac{\theta_0^2 - \theta^2}{\theta^2 - \theta_1^2}};$$

d'où, en élevant au carré et représentant par r le rayon vecteur $l\theta$ de la courbe décrite par la projection horizontale de l'extrémité du pendule,

$$r^2 = \frac{l^2\theta_0^2\theta_1^2}{\theta_0^2\sin^2\varphi' + \theta_1^2\cos^2\varphi'}. \tag{25}$$

Soient A_1 la projection horizontale du point de suspension; A_1x un axe, dans le plan horizontal, se mouvant dans le sens

du mouvement avec la vitesse angulaire $\frac{3}{8}k\theta_0\theta_1$; l'équation (25) sera celle d'une ellipse dont A_1 sera le centre et A_1x la direction du grand axe. Donc :

En projection horizontale, *la masse terminale du pendule décrit une ellipse qui tourne uniformément autour de son centre et dans le sens du mouvement pendulaire avec la vitesse angulaire constante* $\frac{3}{8}\theta_0\theta_1\sqrt{\frac{g}{l}}$.

A la fin d'une révolution elliptique, le déplacement angulaire de l'ellipse sera sensiblement $\frac{3}{8}\theta_0\theta_1\sqrt{\frac{g}{l}}\,2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{3\pi}{4}\theta_0\theta_1$ et sera ainsi indépendant de la longueur du pendule.

25. *Influence de la résistance de l'air sur le mouvement du pendule conique.* — Dans les oscillations elliptiques du pendule très peu écarté de la verticale, on observe que le grand axe diminue progressivement, ce que l'on ne peut attribuer qu'à la résistance de l'air.

En supposant que θ_0 et θ_1 se rapportent à l'état initial, le déplacement angulaire du grand axe à la fin de la première révolution elliptique sera, à très peu près, $\frac{3}{4}\pi\theta_0\theta_1$.

Mais, dans la révolution suivante, par suite de la résistance de l'air, les écarts maximum et minimum seront devenus $\theta'_0 < \theta_0$, $\theta'_1 < \theta_1$. Comme le mouvement du grand axe est relativement lent, on peut en faire abstraction dans le calcul de θ'_0, θ'_1, et l'on retombe alors sur la question du n° 2, où l'on a vu que la résistance ne modifiait pas la position du grand axe. Le déplacement angulaire du grand axe du commencement à la fin de la seconde révolution elliptique sera $\frac{3}{4}\pi\theta'_0\theta'_1$, et ainsi de suite. D'après le numéro précité, les valeurs de $\theta_0 - \theta'_0$, $\theta_1 - \theta'_1$ sont affectées du facteur l, de sorte que le déplacement du grand axe diminuera d'autant plus rapidement que le pendule sera plus long.

CHAPITRE IV.

DYNAMIQUE ANALYTIQUE.

26. *Équation générale de la Dynamique.* — Soient $m, m', \ldots$ les masses des éléments matériels d'un système; $(x, y, z), (x', y', z'), \ldots$ leurs coordonnées rectangulaires; r la distance mm';
$mm'f(r)$ l'action mutuelle de m, m'.

Un certain nombre des points $m, m', \ldots$ peuvent être assujettis à rester sur des courbes et des surfaces fixes qui donnent lieu à des réactions normales.

Le point m peut être considéré comme libre, en le supposant sollicité par la résultante $\overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z}$ de la force extérieure qui agit sur lui, des actions moléculaires qu'il reçoit des autres points $m', m'', \ldots$ et de la réaction de la ligne ou surface fixe sur laquelle il peut se trouver, et l'on a

$$X - m\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \qquad Y - m\frac{d^2y}{dt^2} = 0, \qquad Z - m\frac{d^2z}{dt^2} = 0.$$

Concevons un déplacement hypothétique ou *virtuel* infiniment petit et arbitraire du point m, et dont nous désignerons par $\delta x, \delta y, \delta z$ les projections sur Ox, Oy, Oz.

Nous avons

$$\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x = 0, \quad \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y = 0. \quad \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z = 0.$$

Si nous ajoutons ces équations aux équations semblables établies pour tous les autres points matériels du système,

nous aurons, en attribuant au symbole $\sum$ la signification de *somme*

$$(1)\quad \sum\left[\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right] = 0.$$

Si les déplacements virtuels sont tangents aux lignes et surfaces fixes, les réactions normales de ces obstacles disparaissent dans les $X\,\delta x$, $Y\,\delta y$, $Z\,\delta z$.

En remplaçant, dans l'équation (1), les déplacements virtuels δx, δy, δz par les déplacements réels dx, dy, dz, l'équation (1) devient

$$\sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}dx + \frac{d^2y}{dt^2}dy + \frac{d^2z}{dt^2}dz\right) = \sum(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

ou

$$\frac{1}{2}d\sum m\left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}\right) = \sum(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz).$$

Si v désigne la vitesse de m à l'instant t et v_0 la vitesse initiale, l'équation précédente donne

$$(2)\qquad \frac{1}{2}\left(\sum mv^2 - \sum mv_0^2\right) = \sum\int(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz),$$

la limite inférieure de l'intégrale se rapportant à la position initiale du système. L'équation (2) exprime que, pour deux positions successives du système, *le demi-accroissement de la force vive est égal au travail total des forces extérieures et moléculaires.*

Si le système est composé de corps solides réagissant les uns sur les autres, le travail des actions mutuelles intérieures sera nul pour chaque corps, et le travail moléculaire se réduira à celui des actions mutuelles développées au contact des corps, c'est-à-dire à celui du frottement dont on fera abstraction. Dans ces conditions, le second membre de l'équation (2) représentera uniquement le travail des forces extérieures.

Revenant au cas général, l'équation (2) ne sera utile, au point de vue analytique, que si $\sum(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$ est la différentielle d'une fonction de $x, y, z, x', y', z', \ldots$; mais il

suffit qu'il en soit ainsi pour les forces extérieures, puisque le travail moléculaire élémentaire $\sum mm'f(r)\,dr$ est une différentielle exacte. Soient donc U la fonction dite *des forces* ou appelée *potentiel*, h une constante dépendant de l'état initial du mouvement; nous pourrons écrire

$$(3)\qquad \sum mv^2 = 2U + h.$$

Il est d'ailleurs évident que l'on a

$$(4)\qquad X = \frac{\partial U}{\partial x},\quad Y = \frac{\partial U}{\partial y},\quad Z = \frac{\partial U}{\partial z},\quad X' = \frac{\partial U}{\partial x'},\quad \ldots.$$

27. *Équations du mouvement d'un système à liaisons.* — Soient n le nombre des points m, m', m'', ...; $k < 3n$ le nombre total des équations des lignes et surfaces fixes.

On peut combiner entre elles ces équations de manière à en obtenir un même nombre, mais chacune des dernières pouvant contenir les coordonnées de plusieurs points. Pour plus de généralité, on supposera que les équations, dites de *liaisons*, représentées par

$$(5)\qquad L_1 = 0,\quad L_2 = 0,\quad \ldots,\quad L_k = 0,$$

peuvent renfermer les coordonnées de tous les points du système.

On ne considérera que des déplacements virtuels situés sur les courbes et surfaces fixes, c'est-à-dire *compatibles* avec les liaisons. Comme l'équation $L_1 = 0$ doit être satisfaite par $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$, $x' + \delta x'$, ..., on a

$$(6)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial L_1}{\partial x}\delta x + \dfrac{\partial L_1}{\partial y}\delta y + \dfrac{\partial L_1}{\partial z}\delta z + \dfrac{\partial L_1}{\partial x'}\delta x' + \ldots = 0, \\ \text{et, de même,} \\ \dfrac{\partial L_2}{\partial x}\delta x + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial L_k}{\partial x}\delta x + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0. \end{array}\right.$$

En portant dans l'équation (1) k des variations $\delta x, \ldots,$ exprimées au moyen des équations précédentes en fonction des $3n-k$ autres qui resteront arbitraires, on égalera à zéro les coefficients de ces $3n-k$ variations; on obtiendra ainsi $3n-k$ équations entre $x, y, z, x', \ldots,$ qui, jointes aux k équations (5), permettront de déterminer les coordonnées en fonction du temps. Les $3n$ équations seront donc celles du mouvement.

Mais on peut s'affranchir de la considération des variations par le procédé suivant : ajoutant l'équation (1) aux équations (6), multipliées respectivement par les coefficients indéterminés $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, et égalant à o les coefficients des δ, on obtient les $3n$ équations

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l} X - m\dfrac{d^2x}{dt^2} + \lambda_1\dfrac{\partial L_1}{\partial x} + \lambda_2\dfrac{\partial L_2}{\partial x} + \ldots = 0, \\ Y - m\dfrac{d^2y}{dt^2} + \lambda_1\dfrac{\partial L_1}{\partial y} + \lambda_2\dfrac{\partial L_2}{\partial y} + \ldots = 0, \\ Z - m\dfrac{d^2z}{dt^2} + \lambda_1\dfrac{\partial L_1}{\partial z} + \ldots\ldots\ldots\ldots = 0, \\ X' - m\dfrac{d^2x'}{dt^2} + \lambda_1\dfrac{\partial L_1}{\partial x'} + \ldots\ldots\ldots\ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Les coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ se détermineront au moyen de k de ces équations, et, en portant leurs valeurs dans les autres, on obtiendra $3n-k$ équations en $x, y, z, x', \ldots,$ qui, jointes aux équations (5), donneront celles du mouvement.

On peut supposer que l'on n'a que $3n-k$ équations entre autant de coordonnées, les k autres coordonnées ayant été éliminées au moyen des équations (5). L'intégration de ces $3n-k$, qui sont du second ordre, introduira $2(3n-k)$ constantes arbitraires, que l'on déterminera en exprimant que, pour $t=0$, les coordonnées restantes et leurs dérivées par rapport au temps ont des valeurs données; c'est ce que l'on appelle les *conditions initiales* du mouvement. Le problème étant censé résolu, les λ_i seront déterminés.

On peut mettre celles des équations (7) qui se rapportent à

m sous la forme

$$\left(X + \lambda_1 \frac{\partial L_1}{\partial x}\right) - m\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda_2 \frac{\partial L_2}{\partial x} + \ldots = 0,$$

$$\left(Y + \lambda_1 \frac{\partial L_1}{\partial y}\right) - m\frac{d^2y}{dt^2} + \lambda_2 \frac{\partial L_2}{\partial y} + \ldots = 0,$$

$$\left(Z + \lambda_1 \frac{\partial L_1}{\partial z}\right) - m\frac{d^2z}{dt^2} + \lambda_2 \frac{\partial L_2}{\partial z} + \ldots = 0.$$

De cette manière, on voit que la liaison $L_1 = 0$ produit le même effet que si m était sollicité par la force extérieure

$$\overline{\lambda_1 \frac{\partial L_1}{\partial x}} + \overline{\lambda_1 \frac{\partial L_1}{\partial y}} + \overline{\lambda_1 \frac{\partial L_1}{\partial z}} = \lambda_1 \sqrt{\left(\frac{\partial L_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial L_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial L_1}{\partial z}\right)^2},$$

et il est facile de reconnaître que cette force de liaison est normale à la surface représentée par l'équation $L_1 = 0$, dans laquelle les coordonnées x, y, z sont seules considérées comme variables indépendantes.

28. *Théorème d'Hamilton.* — Soient

m, m_1, ... les masses d'un système à liaisons;
x_i, y_i, z_i les coordonnées de m_i à l'instant t;
$T = \frac{1}{2}\sum m\left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}\right)$ la demi-force vive du système;
U le potentiel;
t_0, t_1 deux époques déterminées pour lesquelles les coordonnées (x_i, y_i, z_i) ont des valeurs également déterminées.

Si l'on pose

$$S = \int_{t_0}^{t_1} (T + U)\,dt,$$

il s'agit de démontrer que, pour des variations des coordonnées compatibles avec les liaisons, on a $\delta S = 0$ ou

$$(8) \qquad \int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta U)\,dt = 0.$$

Nous avons

$$\delta U = \sum \left(\frac{\partial U}{\partial x} \delta x + \frac{\partial U}{\partial y} \delta y + \frac{\partial U}{\partial z} \delta z \right),$$

$$\delta T\, dt = \sum m \left(\frac{dx}{dt} \delta\, dx + \frac{dy}{dt} \delta\, dy + \frac{dz}{dt} \delta\, dx \right)$$

$$= \sum m \left(\frac{dx}{dt} d\, \delta x + \frac{dy}{dt} d\, \delta y + \frac{dz}{dt} d\, \delta z \right).$$

Or, en intégrant par partie et se rappelant que, pour $t = t_0$, $t = t_1$, la variation δx est nulle, on a

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{dx}{dt} d\, \delta x = -\int_{t_0}^{t_1} \frac{d^2 x}{dt^2} \delta x\, dt;$$

donc

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta T\, dt = -\int_{t_0}^{t_1} dt \sum m \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \delta x + \frac{d^2 y}{dt^2} \delta y + \frac{d^2 z}{dt^2} \delta z \right);$$

par suite,

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} dt \sum \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} - m \frac{d^2 x}{dt^2} \right) \delta x + \left(\frac{\partial U}{\partial y} - m \frac{d^2 y}{dt^2} \right) \delta y + \left(\frac{\partial U}{\partial z} - m \frac{d^2 z}{dt^2} \right) \delta z \right],$$

quantité qui est nulle, en vertu de l'équation du mouvement.

29. *Équations du mouvement, dues à Lagrange, dans un système quelconque de coordonnées.* — On peut supposer que les ν coordonnées rectangulaires indépendantes sont exprimées au moyen de ν autres variables $u, u_1, \ldots, u_{\nu-1}$ au moyen de relations qui pourront renfermer t; par suite, toutes les coordonnées rectangulaires pourront s'exprimer au moyen de $u, u_1, \ldots, u_{\nu-1}$ et de t.

Si nous posons $u' = \frac{du}{dt}$, $u'_1 = \frac{du_1}{dt}$, ..., nous aurons

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial x}{\partial u_1} \frac{du_1}{dt} + \ldots = \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial u} u' + \frac{\partial x}{\partial u_1} u'_1 + \ldots$$

$$\frac{dy}{dt} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et nous voyons, par suite, que T est une fonction de u, $u_1, \ldots$ et de $u', u'_1, \ldots$.

Nous avons donc

$$\delta T = \sum \left(\frac{\partial T}{\partial u} \delta u + \frac{\partial T}{\partial u'} \delta u' \right).$$

Comme U ne peut dépendre que de u, u_1, ..., on a

$$\delta U = \sum \frac{\partial U}{\partial u} \delta u,$$

et l'équation (8) devient

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum \left(\frac{\partial T}{\partial u} \delta u + \frac{\partial T}{\partial u'} \delta u' + \frac{\partial U}{\partial u} \delta u \right) dt = 0.$$

Or

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial T}{\partial u'} \delta u' \, dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial T}{\partial u'} \delta \, du = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial T}{\partial u'} d \, \delta u$$
$$= \left(\frac{\partial T}{\partial u'} \delta u \right)_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial u'} dt = - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial u'} \delta u,$$

et l'équation précédente devient

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum \left(\frac{\partial T}{\partial u} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial u'} + \frac{\partial U}{\partial u} \right) \delta u \, dt = 0.$$

Comme les δu sont arbitraires, il faut que tous leurs coefficients dans cette intégrale soient nuls; nous avons donc, pour les ν équations du mouvement entre t, u, u_1, ..., $u_{\nu-1}$,

$$(9) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial T}{\partial u} - \dfrac{d}{dt} \dfrac{\partial T}{\partial u'} + \dfrac{\partial U}{\partial u} = 0, \\ \dfrac{\partial T}{\partial u_1} - \dfrac{d}{dt} \dfrac{\partial T}{\partial u'_1} + \dfrac{\partial U}{\partial u_1} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array} \right.$$

30. *Formules d'Hamilton.* — Nous supposerons ici que les relations entre les x, y, z et les u sont indépendantes du temps.

Nous avons

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial x}{\partial u_1} \frac{du_1}{dt} + \ldots = \frac{\partial x}{\partial u} u' + \frac{\partial x}{\partial u_1} u'_1 + \ldots,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots;$$

et T est une fonction homogène du second degré de u', u'_1, ...; d'où, d'après une propriété connue de ces fonctions,

$$(a) \qquad 2T = \sum \frac{\partial T}{\partial u'} u' = \sum p u',$$

en posant

$$(b) \qquad \frac{\partial T}{\partial u'} = p;$$

mais, les p étant des fonctions linéaires de u', on peut exprimer ces dernières quantités au moyen des premières, et l'on aura, par exemple, une relation de la forme

$$u' = f(p, p_1, \ldots, u, u_1, \ldots);$$

soit donc

$$T = F(p, p_1, \ldots, u, u_1, \ldots).$$

On distinguera par la caractéristique $\mathfrak{d}$ les dérivées partielles prises à ce nouveau point de vue, et l'on aura

$$(c) \quad \frac{\mathfrak{d}T}{\mathfrak{d}u} = \frac{\partial T}{\partial u} + \frac{\partial T}{\partial u'}\frac{\partial u'}{\partial u} + \frac{\partial T}{\partial u'_1}\frac{\partial u'_1}{\partial u} + \ldots = \frac{\partial T}{\partial u} + p\frac{\partial u'}{\partial u} + p_1\frac{\partial u'_1}{\partial u} + \ldots,$$

$$(d) \quad \frac{\mathfrak{d}T}{\mathfrak{d}p} = \frac{\partial T}{\partial u'}\frac{\partial u'}{\partial p} + \frac{\partial T}{\partial u'_1}\frac{\partial u'_1}{\partial p} + \ldots = p\frac{\partial u'}{\partial p} + p_1\frac{\partial u'_1}{\partial p} + \ldots.$$

En différentiant l'équation (a) successivement par rapport à u et p, on trouve

$$(c') \qquad 2\frac{\mathfrak{d}T}{\mathfrak{d}u} = p\frac{\partial u'}{\partial u} + p_1\frac{\partial u'_1}{\partial u} + \ldots,$$

$$(d') \quad 2\frac{\mathfrak{d}T}{\mathfrak{d}p} = u' + p\frac{\partial u'}{\partial p} + p_1\frac{\partial u'_1}{\partial p} + \ldots = \frac{du}{dt} + p\frac{\partial u'}{\partial p} + p_1\frac{\partial u'_1}{\partial p} + \ldots.$$

En retranchant (c) de (c') et (d) de (d'), il vient

$$(e) \qquad \frac{\mathfrak{d}T}{\mathfrak{d}u} = -\frac{\partial T}{\partial u}, \qquad \frac{\mathfrak{d}T}{\mathfrak{d}p} = \frac{du}{dt},$$

équations entre les deux variables u et p qui remplacent l'équation de Lagrange, qui se rapporte à u, laquelle peut se mettre sous la forme

$$(f) \qquad \frac{dp}{dt} - \frac{\partial T}{\partial u} = \frac{\partial U}{\partial u}.$$

En posant

$$T - U = H,$$

il vient, en remarquant que U est indépendant de u', par suite de p,

$$\frac{\mathfrak{d}T}{\mathfrak{d}p} = \frac{\mathfrak{d}H}{\mathfrak{d}p};$$

l'équation (f), eu égard à la première des formules (e), et la seconde de ces formules deviennent, en supprimant la distinction entre $\mathfrak{d}$ et ∂ devenue inutile,

$$(10)\quad \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{dp}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial u}, & \dfrac{du}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p}, \\ \text{et, de même,} & \\ \dfrac{dp_1}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial u_1}, & \dfrac{du_1}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Soient δu et δp deux variations arbitraires. On a

$$\frac{du}{dt}\delta p - \frac{dp}{dt}\delta u = \frac{\partial H}{\partial p}\delta p + \frac{dH}{du}\partial u,$$

et toutes les équations (10) sont comprises dans la suivante

$$\sum\left(\frac{du}{dt}\delta p - \frac{dp}{dt}\delta u\right) = \sum\left(\frac{\partial H}{\partial p}\delta p + \frac{\partial H}{\partial u}\delta u\right) = \delta H$$

ou

$$(11)\qquad \sum\left(\frac{du}{dt}\delta p - \frac{dp}{du}\delta u\right) = \delta H\, dt.$$

Ces formes, dites *canoniques*, sont surtout utiles dans la théorie des perturbations des planètes.

31. *Équations du mouvement d'un système matériel en coordonnées sphériques.* — On a

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi, \qquad z = r\cos\theta,$$

et les équations de Lagrange prennent la forme

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial r'} - \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial U}{\partial r},$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \theta'} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\partial U}{\partial \theta},$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \varphi'} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{\partial U}{\partial \varphi},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

D'autre part,

$$T = \frac{1}{2}\sum m\,\frac{dr^2 + r^2\,d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,d\varphi^2}{dt^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sum m(r'^2 + r^2\theta'^2 + r^2\sin^2\theta\,.\,\varphi'^2),$$

d'où

$$\frac{\partial T}{\partial r} = mr(\theta'^2 + r\sin^2\theta\,.\,\varphi'^2), \qquad \frac{\partial T}{\partial \theta} = mr^2\sin\theta\cos\theta\,.\,\varphi'^2, \qquad \frac{dT}{d\varphi} = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial r'} = mr', \qquad \frac{\partial T}{\partial \theta'} = mr^2\theta', \qquad \frac{\partial T}{\partial \varphi'} = mr^2\sin^2\theta\,.\,\varphi',$$

et les équations ci-dessus deviennent

$$(12)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{d^2r}{dt^2} - r\dfrac{d\theta^2}{dt^2} - r\sin^2\theta\,\dfrac{d\varphi^2}{dt^2} = \dfrac{1}{m}\dfrac{\partial U}{\partial r}, \\ \dfrac{d}{dt}\left(r^2\dfrac{d\theta}{dt}\right) - r^2\sin\theta\cos\theta\,\dfrac{d\varphi^2}{dt^2} = \dfrac{1}{m}\dfrac{\partial U}{\partial \theta}, \\ \dfrac{d}{dt}\left(r^2\sin^2\theta\,\dfrac{d\varphi}{dt}\right) = \dfrac{1}{m}\dfrac{\partial U}{\partial \varphi}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

En supposant φ constant, on a les équations du mouvement d'un système de points dans un plan.

Considérons le mouvement d'un point pesant m sur une sphère de rayon l (pendule conique). On a

$$U = mgl\cos\theta, \qquad r = l.$$

La première et la troisième des équations (12) rentrent l'une dans l'autre, et ces équations se réduisent aux deux suivantes :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} - \sin\theta\cos\theta\,\frac{d\varphi^2}{dt^2} = \frac{g}{l}\sin\theta, \qquad \sin\theta\,\frac{d\varphi}{dt} = \text{const.}$$

En éliminant $\dfrac{d\varphi}{dt}$ entre ces deux équations, multipliant ensuite par $d\theta$, puis intégrant, on retombe sur la relation connue entre θ et t (t. I).

32. *Équations du mouvement d'un point matériel en coordonnées curvilignes orthogonales.*

(a) Avant d'aborder la question, il nous paraît utile d'éta-

blir les formules qui se rapportent au système de coordonnées dont il s'agit.

En désignant par ρ, ρ_1, ρ_2 trois paramètres arbitraires, soient

$$(1)\qquad \rho = f(x, y, z), \qquad \rho_1 = f_1(x, y, z), \qquad \rho_2 = f_2(x, y, z)$$

les équations de trois séries de surfaces orthogonales qui, par leurs intersections, peuvent servir à déterminer tous les points de l'espace;

$$(2)\qquad x = \mathcal{F}(\rho, \rho_1, \rho_2), \quad y = \mathcal{F}_1(\rho, \rho_1, \rho_2); \quad z = \mathcal{F}_2(\rho, \rho_1, \rho_2)$$

ces équations résolues par rapport aux coordonnées rectangulaires.

Nous emploierons les symboles $\mathfrak{d}$, ∂ pour définir les différentielles partielles qui se rapportent respectivement aux systèmes (1) et (2).

Nous poserons

$$(3)\qquad h_i = \sqrt{\frac{\mathfrak{d}\rho_i^2}{\mathfrak{d}x^2} + \frac{\mathfrak{d}\rho_i^2}{\mathfrak{d}y^2} + \frac{\mathfrak{d}\rho_i^2}{\mathfrak{d}z^2}}.$$

En désignant par N_i la normale au point (x, y, z) de la surface représentée par l'équation $f_i(x, y, z) = \rho_i$, dans laquelle ρ_i est considéré comme constant, on a

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \cos(N_i, x) = \frac{1}{h_i}\frac{\mathfrak{d}\rho_i}{\mathfrak{d}x}, & \cos(N_i, y) = \frac{1}{h_i}\frac{\mathfrak{d}\rho_i}{\mathfrak{d}y}, & \cos(N_i, z) = \frac{1}{h_i}\frac{\mathfrak{d}\rho_i}{\mathfrak{d}z}; \\ \cos(N_j, x) = \frac{1}{h_j}\frac{\mathfrak{d}\rho_j}{\mathfrak{d}x}, & \cos(N_j, y) = \frac{1}{h_j}\frac{\mathfrak{d}\rho_j}{\mathfrak{d}y}, & \cos(N_j, z) = \frac{1}{h_j}\frac{\mathfrak{d}\rho_j}{\mathfrak{d}z}. \end{array}\right.$$

Si l'on exprime que les deux surfaces ρ_i, ρ_j se coupent à angle droit, on obtient

$$(5)\qquad \frac{\mathfrak{d}\rho_i}{\mathfrak{d}x}\frac{\mathfrak{d}\rho_j}{\mathfrak{d}x} + \frac{\mathfrak{d}\rho_i}{\mathfrak{d}y}\frac{\mathfrak{d}\rho_j}{\mathfrak{d}y} + \frac{\mathfrak{d}\rho_i}{\mathfrak{d}z}\frac{\mathfrak{d}\rho_j}{\mathfrak{d}z} = 0.$$

En désignant par dn_i l'élément de la normale N_i limité par les surfaces ρ_i, $\rho_i + d\rho_i$, on a

$$(6)\qquad dn_i = \frac{1}{h_i}\left(\frac{\mathfrak{d}\rho_i}{\mathfrak{d}x}dx + \frac{\mathfrak{d}\rho_i}{\mathfrak{d}y}dy + \frac{\mathfrak{d}\rho_i}{\mathfrak{d}z}dz\right) = \frac{d\rho_i}{h_i}.$$

Il résulte de là que la distance de deux points définis par

les intersections de deux séries de surfaces infiniment voisines a pour expression

$$(7)\qquad ds = \sqrt{\frac{d\rho^2}{h^2} + \frac{d\rho_1^2}{h_1^2} + \frac{d\rho_2^2}{h_2^2}}.$$

Nous avons maintenant, en considérant ρ_1, ρ_2 comme constants,

$$\partial x = \frac{\partial x}{\partial \rho} d\rho,$$

d'où

$$\frac{\partial x}{dn} = h \frac{\partial x}{\partial \rho};$$

mais

$$\frac{\partial x}{dn} = \cos(\mathrm{N}, x) = \frac{1}{h} \frac{\partial \rho}{\partial x},$$

d'où il suit que

$$(8)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial \rho_i}{\partial x} = h_i^2 \dfrac{\partial x}{\partial \rho_i} \\ \text{et, de même,} \\ \dfrac{\partial \rho_i}{\partial y} = h_i^2 \dfrac{\partial y}{\partial \rho_i}, \\ \dfrac{\partial \rho_i}{\partial z} = h_i^2 \dfrac{\partial z}{\partial \rho_i}. \end{array}\right.$$

Si l'on porte ces valeurs dans l'équation (3), on trouve

$$(9)\qquad \frac{1}{h_i} = \sqrt{\frac{\partial x^2}{\partial \rho_i^2} + \frac{\partial y^2}{\partial \rho_i^2} + \frac{\partial z^2}{\partial \rho_i^2}}.$$

En ayant égard aux valeurs (8), les équations (4) et (5) deviennent

$$(10)\qquad \cos(\mathrm{N}_i, x) = h_i \frac{\partial x}{\partial \rho_i}, \quad \cos(\mathrm{N}_i, y) = h_i \frac{\partial y}{\partial \rho_i}, \quad \cos(\mathrm{N}_i, z) = h_i \frac{\partial z}{\partial \rho_i};$$

$$(11)\qquad \frac{\partial x}{\partial \rho_i}\frac{\partial x}{\partial \rho_j} + \frac{\partial y}{\partial \rho_i}\frac{\partial y}{\partial \rho_j} + \frac{\partial z}{\partial \rho_i}\frac{\partial z}{\partial \rho_j} = 0.$$

(*b*) Ces préliminaires étant établis, considérons le mouvement d'un point matériel libre, dont la masse est censée égale à l'unité, sollicité par une force dérivant d'un potentiel U.

Nous avons, en ayant égard à la valeur (7),

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{h^2}\frac{d\rho^2}{dt^2} + \frac{1}{h^2}\frac{d\rho_1^2}{dt^2} + \frac{1}{h_2^2}\frac{d\rho_2^2}{dt^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\rho'^2}{h^2} + \frac{\rho_1'^2}{h_1^2} + \frac{\rho_2'^2}{h_2^2}\right);$$

$$\frac{\partial T}{\partial \rho'} = \frac{\rho'}{h^2}, \qquad \frac{\partial T}{\partial \rho_1'} = \ldots;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \rho} = \frac{1}{2}\left(\rho'^2\frac{\partial \frac{1}{h^2}}{\partial \rho} + \rho_1'^2\frac{\partial \frac{1}{h_1^2}}{\partial \rho} + \rho_2'^2\frac{\partial \frac{1}{h_2^2}}{\partial \rho}\right), \qquad \frac{\partial T}{\partial \rho_1} = \ldots, \qquad \ldots,$$

et, pour les équations du mouvement,

$$\frac{d}{dt}\frac{\rho'}{h^2} - \frac{1}{2}\left(\rho'^2\frac{\partial \frac{1}{h^2}}{\partial \rho} + \rho_1'^2\frac{\partial \frac{1}{h_1^2}}{\partial \rho} + \rho_2'^2\frac{\partial \frac{1}{h_2^2}}{\partial \rho}\right) = \frac{\partial U}{\partial \rho},$$

.....

.....

ou

$$(12)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{h^2}\dfrac{d^2\rho}{dt^2} + \dfrac{d\rho}{dt}\dfrac{d\frac{1}{h^2}}{dt} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{d\rho^2}{dt^2}\dfrac{\partial \frac{1}{h^2}}{\partial \rho} + \dfrac{d\rho_1^2}{dt^2}\dfrac{\partial \frac{1}{h_1^2}}{\partial \rho_1} + \dfrac{d\rho_2^2}{dt^2}\dfrac{\partial \frac{1}{h_2^2}}{\partial \rho_2}\right) = \dfrac{\partial U}{\partial \rho}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

équations auxquelles nous joindrons celle des forces vives

$$(13)\qquad \frac{1}{h^2}\frac{d\rho_2}{dt^2} + \frac{1}{h_1^2}\frac{d\rho_1^2}{dt^2} + \frac{1}{h_2^2}\frac{d\rho_2^2}{dt^2} = 2U + C,$$

qui s'en déduit immédiatement, comme cela devait être.

Si le mobile est assujetti à rester sur la surface $\rho = \text{const.}$, les équations du mouvement se réduisent à

$$(12')\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{h_1^2}\dfrac{d^2\rho_1}{dt^2} + \dfrac{d\rho_1}{dt}\dfrac{d\frac{1}{h_1^2}}{dt} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{d\rho_1^2}{dt^2}\dfrac{\partial \frac{1}{h_1^2}}{\partial \rho_1} + \dfrac{d\rho_2^2}{dt^2}\dfrac{\partial \frac{1}{h_2^2}}{\partial \rho_1}\right) = \dfrac{\partial U}{\partial \rho_1}, \\ \dfrac{1}{h_2^2}\dfrac{d^2\rho_2}{dt^2} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \dfrac{\partial U}{\partial \rho_2}, \end{array}\right.$$

$$(13')\qquad \frac{1}{h_1^2}\frac{d\rho_1^2}{dt^2} + \frac{1}{h_2^2}\frac{d\rho_2^2}{dt^2} = 2U + C.$$

(*c*) Supposons maintenant qu'une série de surfaces ortho-

gonales se compose d'un ellipsoïde et de ses hyperboloïdes homofocaux à une nappe et à deux nappes, représentés respectivement par les équations

$$(14)\qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{\rho^2} + \dfrac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \dfrac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1, \\ \dfrac{x^2}{\rho_1^2} + \dfrac{y^2}{\rho_1^2 - b^2} - \dfrac{z^2}{c^2 - \rho_1^2} = 1, \\ \dfrac{x^2}{\rho_2^2} - \dfrac{y^2}{b^2 - \rho_2^2} - \dfrac{z^2}{c^2 - \rho_2^2} = 1, \end{cases}$$

dont on déduit les suivantes,

$$(15)\qquad \begin{cases} x^2 = \dfrac{\rho^2 \rho_1^2 \rho_2^2}{b^2 c^2}, \\ y^2 = \dfrac{(\rho^2 - b^2)(\rho_1^2 - b^2)(\rho_2^2 - b^2)}{(b^2 - c^2) b^2}, \\ z^2 = \dfrac{(\rho^2 - c^2)(\rho_1^2 - c^2)(\rho_2^2 - c^2)}{(c^2 - b^2) c^2}. \end{cases}$$

Ces dernières donnent

$$\log x^2 = -\log b^2 c^2 + \log \rho^2 + \log \rho_1^2 + \log \rho_2^2,$$
$$\log y^2 = -\log (b^2 - c^2) b^2 + \log (\rho^2 - b^2) + \log (\rho_1^2 - b^2) + \log (\rho_2^2 - b^2),$$
$$\log z^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

d'où, en différentiant,

$$dx = x\left(\rho \frac{d\rho}{\rho^2} + \rho_1 \frac{d\rho_1}{\rho_1^2} + \rho_2 \frac{d\rho_2^2}{\rho_2^2}\right),$$
$$dy = y\left(\rho \frac{d\rho}{\rho^2 - b^2} + \rho_1 \frac{d\rho_1}{\rho_1^2 - b^2} + \rho^2 \frac{d\rho_2}{\rho_2^2 - b^2}\right),$$
$$dz = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Nous aurons, par exemple,

$$\frac{1}{h^2} = \rho^2 \left[\frac{x^2}{\rho^4} + \frac{y^2}{(\rho^2 - b^2)^2} + \frac{z^2}{(\rho^2 - c^2)^2}\right],$$

ou, en remplaçant $\dfrac{x^2}{\rho^2}$ par sa valeur déduite de la première des

équations (14),

$$\frac{1}{h^2} = 1 + \frac{y^2 b^2}{(\rho^2 - b^2)^2} + \frac{z^2 c^2}{(\rho^2 - c^2)^2}$$

et, en substituant à y^2 et z^2 leurs valeurs (15),

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{h^2} = \frac{(\rho^2 - \rho_1^2)(\rho^2 - \rho_2^2)}{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)} \\ &\text{et, de même,} \\ &\frac{1}{h_1^2} = \frac{(\rho_1^2 - \rho^2)(\rho_1^2 - \rho_2^2)}{(\rho_1^2 - b^2)(\rho_1^2 - c^2)}, \\ &\frac{1}{h_2^2} = \frac{(\rho_2^2 - \rho^2)(\rho_2^2 - \rho_1^2)}{(\rho_2^2 - b^2)(\rho_2^2 - c^2)}. \end{aligned}\right.$$

(*d*) Supposons que le point mobile soit assujetti à rester sur un ellipsoïde représenté par la première des équations (14) et qu'il ne soit sollicité par aucune force extérieure. La courbe décrite sera une ligne géodésique de la surface [1].

Si l'on pose

$$\frac{\rho^2 - \rho_1^2}{(\rho_1^2 - b^2)(c^2 - \rho_1^2)} = m_1, \qquad \frac{\rho^2 - \rho_2^2}{(b^2 - \rho_2^2)(c^2 - \rho_2^2)} = m_2,$$

on a

$$\frac{1}{h_1^2} = m_1(\rho_1^2 - \rho_2^2), \qquad \frac{1}{h_2^2} = m_2(\rho_1^2 - \rho_2^2).$$

En substituant ces valeurs, l'équation (13′) et la première des équations (12′) deviennent respectivement

$$(13'')\qquad m_1 \frac{d\rho_1^2}{dt^2} + m_2 \frac{d\rho_2^2}{dt^2} = \frac{C}{\rho_1^2 - \rho_2^2};$$

$$(12'')\quad \left\{\begin{aligned} &m_1(\rho_1^2 - \rho_2^2)\frac{d^2\rho_1}{dt^2} + \frac{1}{2}(\rho_1^2 - \rho_2^2)\frac{dm_1}{dt}\cdot\frac{d\rho_1}{dt} \\ &\qquad + 2m_1 \frac{d\rho_1}{dt}\left(\rho_1 \frac{d\rho_1}{dt} - \rho_2 \frac{d\rho_2}{dt}\right) \\ &\quad = \rho_1\left(m_1 \frac{d\rho_1^2}{dt^2} + m_2 \frac{d\rho_2^2}{dt^2}\right). \end{aligned}\right.$$

---

[1] Ce qui suit est emprunté à Liouville (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1844).

L'équation (12″), en ayant égard à l'équation (13″) revient à

$$m_1(\rho_1^2-\rho_2^2)\frac{d^2\rho_1}{dt^2}$$
$$+\frac{1}{2}(\rho_1^2-\rho_2^2)\frac{dm_1}{dt}\frac{d\rho_1}{dt}+m_1\frac{d\rho_1}{dt}\frac{d}{dt}(\rho_1^2-\rho_2^2)=\frac{C\rho_1}{\rho_1^2-\rho_2^2}$$

ou

$$\sqrt{m_1}\left[(\rho_1^2-\rho_2^2)\frac{d}{dt}\left(\sqrt{m_1}\frac{d\rho_1}{dt}\right)+\sqrt{m_1}\frac{d\rho_1}{dt}\frac{d(\rho_1^2-\rho_2^2)}{dt}\right]=\frac{C\rho_1}{\rho_1^2-\rho_2^2}$$

ou enfin

$$\sqrt{m_1}\frac{d}{dt}\left[(\rho_1^2-\rho_2^2)\sqrt{m_1}\frac{d\rho_1}{dt}\right]=\frac{C\rho_1}{\rho_1^2-\rho_2^2}.$$

En multipliant cette dernière équation par $2(\rho_1^2-\rho_2^2)\frac{d\rho_1}{dt}$, il vient

$$2\sqrt{m_1}\frac{d\rho_1}{dt}(\rho_1^2-\rho_2^2)\,d\left[(\rho_1^2-\rho_2^2)\sqrt{m_1}\frac{d\rho_1}{dt}\right]=C\,d\rho_1^2;$$

d'où, en désignant par A_1 une constante arbitraire,

$$(a_1)\qquad m_1(\rho_1^2-\rho_2^2)^2\frac{d\rho_1^2}{dt^2}=A_1+C\rho_1^2.$$

La seconde des équations (12′) donne de la même manière

$$(a_2)\qquad m_2(\rho_1^2-\rho_2^2)^2\frac{d\rho_2^2}{dt^2}=A_2-C\rho_2^2.$$

Si l'on ajoute les équations (a_1) et (a_2), on obtient

$$(\rho_1^2-\rho_2^2)\left[m_1(\rho_1^2-\rho_2^2)\frac{d\rho_1^2}{dt^2}+m_2(\rho_1^2-\rho_2)\frac{d\rho_2^2}{dt^2}\right]=A_1+A_2+C(\rho_1^2-\rho_2^2)$$

ou, en ayant égard à la formule (13″),

$$C(\rho_1^2-\rho_2^2)=A_1+A_2+C(\rho_1^2-\rho_2^2);$$

d'où

$$A_1=-A_2.$$

En posant $\frac{A_2}{C}=\beta$, les équations (a_1), (a_2) donnent, par division,

$$(b)\qquad \frac{m_1}{m_2}\frac{d\rho_1^2}{d\rho_2^2}=\frac{\rho_1^2-\beta}{\beta-\rho_2^2}.$$

Si l'on remplace m_1, m_2 par leurs expressions, que l'on extraye la racine carrée en prenant le signe — dans le second membre pour fixer les idées, on trouve

$$\sqrt{\frac{(\rho^2-\rho_1^2)(b^2-\rho_2^2)(c^2-\rho_2^2)}{(\rho^2-\rho_2^2)(\rho_1^2-b^2)(c^2-\rho_1^2)}}\,\frac{d\rho_1}{d\rho_2}=-\sqrt{\frac{\rho_1^2-\beta}{\beta-\rho_2^2}}$$

ou

$$(c)\quad \frac{\sqrt{\rho^2-\rho_1^2}\,d\rho_1}{\sqrt{(\rho_1^2-b^2)(c^2-\rho_1^2)(\rho_1^2-\beta)}}=-\frac{\sqrt{\rho^2-\rho_2^2}\,d\rho_2}{\sqrt{(b^2-\rho_2^2)(c^2-\rho_2^2)(\beta-\rho_2^2)}}.$$

En posant

$$(17)\quad \Delta(\rho_1^2)=\sqrt{\rho_1^2(\rho^2-\rho_1^2)(b^2-\rho_1^2)(c^2-\rho_1^2)(\beta-\rho_1^2)},\qquad \Delta(\rho_2)=\ldots,$$

l'équation (c) donne, pour l'équation générale des lignes géodésiques de l'ellipsoïde en coordonnées elliptiques,

$$(18)\qquad \int\frac{(\rho^2-\rho_1^2)\,d(\rho_1)^2}{\Delta(\rho_1^2)}+\int\frac{(\rho^2-\rho_2^2)\,d(\rho_2^2)}{\Delta(\rho_2^2)}=\text{const.},$$

équation dans laquelle les intégrales sont des intégrales abéliennes de première classe et de première espèce.

L'élément de la ligne géodésique est

$$ds=\sqrt{\frac{1}{h_1^2}\,d\rho_1^2+\frac{1}{h_2^2}\,d\rho_2^2};$$

mais l'équation (b) donne

$$\frac{\sqrt{m_1}}{\sqrt{\rho_1^2-\beta}}\,d\rho_1=-\frac{\sqrt{m_2}}{\sqrt{\beta-\rho_2^2}}\,d\rho_2,$$

ou, en multipliant par $\sqrt{\rho_1^2-\rho_2^2}$,

$$\frac{1}{h_1}\,\frac{d\rho_1}{\sqrt{\rho_1^2-\beta}}=-\frac{1}{h_2}\,\frac{d\rho_2}{\sqrt{\beta-\rho_2^2}};$$

on a donc

$$ds=\frac{1}{h_1}\sqrt{\frac{\rho_1^2-\rho_2^2}{\rho_1^2-\beta}}\,d\rho_1=\sqrt{m_1}\,\frac{(\rho_1^2-\rho_2^2)\,d\rho_1}{\sqrt{\rho_1^2-}}$$

$$=\frac{\sqrt{m_1}\,\rho_1^2\,d\rho_1}{\sqrt{\rho_1^2-\beta}}-\frac{\sqrt{m_1}\,\rho_2^2\,d\rho_1}{\sqrt{\rho_1^2-\beta}}$$

ou

$$ds = \frac{\sqrt{m_1}\rho_1^2\,d\rho_1}{\sqrt{\rho_1^2-\beta}} + \frac{\sqrt{m_2}\rho_2^2\,d\rho_2}{\sqrt{\beta-\rho_2^2}}.$$

Enfin, en remplaçant m_1, m_2 par leurs expressions et intégrant, il vient

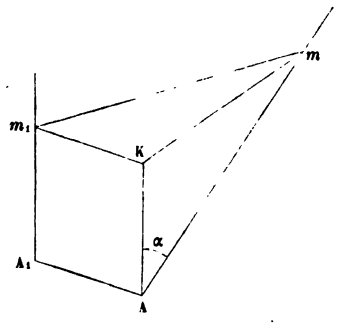
$$s = \int \frac{\rho_1^2(\rho^2-\rho_1^2)\,d(\rho_1^2)}{\Delta(\rho_1^2)} + \int \frac{\rho_2^2(\rho^2-\rho_2^2)\,d(\rho_2^2)}{\Delta(\rho_2^2)} + \text{const.}$$

et s s'exprime aussi au moyen de deux intégrales abéliennes de première classe et de seconde espèce.

33. *Application des équations de Lagrange à la solution de quelques problèmes.*

1° *Mouvement de deux points matériels m, m_1, assujettis à rester sur deux droites et soumis à leur attraction mutuelle $mm_1 f(r)$, en désignant par r leur distance.* — Soient (*fig.* 6)

Fig. 6.



$l = AA_1$ la plus courte des deux droites Am, Am_1;
$u = Am$, $u_1 = Am_1$ les distances respectives de m, m_1 aux points A, A_1 à l'instant t;
AK une droite égale et parallèle à $A_1 m_1$;
α l'angle $\widehat{KAm}$ des deux droites données.

Nous appliquerons ici l'équation

$$(a) \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial u'} - \frac{\partial T}{\partial u} = \frac{\partial U}{\partial u}.$$

Nous avons

$$U = -mm_1 \int f(r)\,dr,$$

$$\frac{\partial U}{\partial u} = -mm_1 f(r)\frac{\partial r}{\partial u},$$

$$r^2 = \overline{m_1 K}^2 + \overline{mK}^2 = l^2 + u^2 + u_1^2 - 2uu_1 \cos\alpha,$$

$$r\frac{\partial r}{\partial u} = u - u_1 \cos\alpha;$$

par suite,

$$\frac{\partial U}{\partial u} = -mm_1 \frac{f(r)}{r}(u - u_1 \cos\alpha).$$

Nous avons aussi

$$T = \frac{1}{2}(mu'^2 + m_1 u_1'^2),$$

$$\frac{\partial T}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial T}{\partial u'} = mu',$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial u'} = m\frac{du'}{dt} = m\frac{d^2u}{dt^2}.$$

La formule (a) devient, par suite,

$$(b)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{d^2u}{dt^2} = -m_1 \dfrac{f(r)}{r}(u - u_1 \cos\alpha) \ (^1) \\ \text{et, de même,} \\ \dfrac{d^2u_1}{dt^2} = -m \dfrac{f(r)}{r}(u_1 - u \cos\alpha). \end{array}\right.$$

Ces équations s'intègrent facilement quand l'attraction est proportionnelle à la distance.

2° *Mouvement de deux points matériels m, m_1 sur un cercle, soumis à une répulsion mutuelle proportionnelle à*

---

(1) On arrive directement à cette équation de la manière suivante. La projection de mm_1 sur mA étant égale à celle de mK, on a

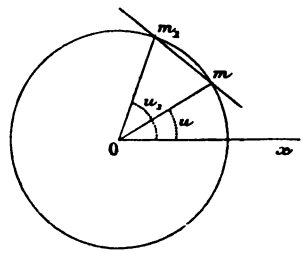
$$\cos\widehat{m_1 mA} = \frac{u - u_1 \cos\alpha}{r},$$

par suite,

$$m\frac{d^2u}{dt^2} = -mm_1 f(r)\frac{u - u_1 \cos\alpha}{r}.$$

l'inverse du carré de la distance r. — Pour simplifier, nous prendrons le rayon $Om = Om_1$ du cercle égal à l'unité. Soient

Fig. 7.



(*fig.* 7) u, u_1 les angles formés par Om, Om_1 avec un axe fixe Ox. Nous avons

$$r = 2\sin\frac{u_1 - u}{2},$$

$$\frac{\partial r}{\partial u} = -\cos\frac{u_1 - u}{2}, \qquad \frac{\partial r}{\partial u_1} = \cos\frac{u_1 - u}{2},$$

$$U = -\frac{mm_1}{r},$$

$$\frac{\partial U}{\partial u} = \frac{mm_1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial u} = -\frac{mm_1}{r^2}\cos\frac{u_1 - u}{2}, \qquad \frac{\partial U}{\partial u_1} = \frac{mm_1}{r^2}\cos\frac{u_1 - u}{2},$$

$$T = \frac{1}{2}(mu'^2 + mu_1'^2),$$

$$\frac{\partial T}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial T}{\partial u_1} = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial u'} = mu' = m\frac{du}{dt}, \qquad \frac{\partial T}{\partial u_1'} = m_1\frac{du_1}{dt},$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial u'} = m\frac{d^2u}{dt^2}, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial u_1'} = m_1\frac{d^2u_1}{dt^2}.$$

L'équation (a) nous donne, par suite,

$$(c) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2u}{dt^2} = -\dfrac{m_1}{r^2}\cos\dfrac{u_1 - u}{2}, \\[2ex] \dfrac{d^2u_1}{dt^2} = \dfrac{m}{r^2}\cos\dfrac{u_1 - u}{2}. \end{cases}$$

Dans le cas où $m = m_1$, on voit que

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{d^2u_1}{dt^2} = 0,$$

et si, pour $t = 0$, on a $\frac{du}{dt} = 0$, $\frac{du_1}{dt} = 0$, $u = \alpha$, $u_1 = \pi - \alpha$, on obtient

$$u + u_1 = \pi;$$

par suite,

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -\frac{m_1}{4}\frac{\sin u}{\cos^2 u}.$$

En multipliant par du et intégrant, on trouve

$$\frac{du^2}{dt^2} = \frac{m_1}{2}\left(\frac{1}{\cos\alpha} - \frac{1}{\cos u}\right);$$

d'où

$$t = \sqrt{\frac{2}{m_1}}\int_\alpha^u \frac{du}{\sqrt{\frac{1}{\cos\alpha} - \frac{1}{\cos u}}}.$$

Si α, par suite u, est assez petit pour qu'on puisse négliger α^4, u^4, le mouvement de m est oscillatoire.

34. *Principe de la moindre action.* — Soient $(m, m_1, \ldots)$ un système à liaisons; x_i, y_i, z_i, $v_i = \frac{ds_i}{dt}$ les coordonnées et la vitesse de m_i à l'instant t.

Nous avons d'abord

$$(1) \qquad \sum mv^2 = 2U + h.$$

En désignant par t_0, t_1 deux époques quelconques, considérons l'intégrale

$$(2) \qquad I = \int_{t_0}^{t_1} \sum mv\, ds.$$

Nous pouvons concevoir que, au moyen des équations du mouvement, on ait exprimé t, x_i, y_i, z_i en fonction de l'une des coordonnées que nous désignerons par u.

En posant $\frac{dx_i}{du} = x'_i$, $\frac{dy_i}{du} = y'_i$, $\frac{dz_i}{du} = z'_i$, nous aurons, au

lieu des formules (1) et (2),

$$(1') \qquad \sum m \frac{x'^2+y'^2+z'^2}{dt^2} du^2 = 2U + h,$$

$$(2') \qquad I = \int_{u_0}^{u_1} \sum m \frac{x'^2+y'^2+z'^2}{dt} du^2.$$

On déduit de l'équation (1')

$$(3) \qquad dt = \sqrt{\frac{\Sigma m(x'^2+y'^2+z'^2)}{2U+h}}\, du,$$

et, en portant cette valeur dans l'équation (2'), on obtient

$$(4) \qquad I = \int_{u_0}^{u_1} \sqrt{(2U+h)\Sigma m(x'^2+y'^2+z'^2)}\, du = \int_{u_0}^{u_1} Q\, du.$$

Si l'on fait varier I en laissant u_0, u_1 constants, il vient [1]

$$(5) \quad \delta I = \int_{u_0}^{u_1} du \sum \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{d}{du}\frac{\partial Q}{\partial x'}\right)\delta x + \left(\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{d}{du}\frac{\partial Q}{\partial y'}\right)\delta y + \left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{d}{du}\frac{\partial Q}{\partial z'}\right)\delta z \right];$$

on a

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \sqrt{\frac{\Sigma m(x'^2+y'^2+z'^2)}{2U+h}}\, \frac{\partial U}{\partial x},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x'} = \sqrt{\frac{2U+h}{\Sigma m(x'^2+y'^2+z'^2)}}\, m x',$$

ou, en vertu de l'équation (3),

$$(6) \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{dt}{du}\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x'} = m\frac{du}{dt}x'.$$

On déduit de la seconde de ces formules

$$(7) \qquad \frac{d}{du}\frac{\partial Q}{\partial x'} = m\frac{d}{du}\frac{dx}{dt} = m\frac{dt}{du}\frac{d^2x}{dt^2}.$$

---

[1] Introduction, nos 1 et 3.

En portant les valeurs (6) et (7) et celles qui se déduisent dans la formule (5), on obtient

$$(8)\qquad \delta I = \int_{u_0}^{u_1} \frac{dt}{du} \sum \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} - m\frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \left(\frac{\partial U}{\partial y} - m\frac{d^2y}{dt^2} \right) \delta y + \left(\frac{\partial U}{\partial z} - m\frac{d^2z}{dt^2} \right) \delta z \right] du,$$

ou, pour des déplacements virtuels compatibles avec les liaisons,

$$\delta I = 0.$$

Il résulte de là que, lorsque le système matériel passe d'une position déterminée à une autre position également déterminée, et que sa force vive dans la première position reste constante, l'intégrale I est un minimum ou un maximum relativement à la valeur qu'elle prendrait si l'on introduisait de nouvelles liaisons dans le système.

Si les positions extrêmes du système définies par u_0 et u_1 sont suffisamment voisines, I sera un minimum.

A l'inverse, l'équation $\delta I = 0$ comprend toutes les équations du mouvement. On voit ainsi que le principe de la moindre action n'apprend rien de nouveau. Cependant il permet de donner rapidement la solution de certains problèmes, comme nous allons le faire voir.

1° *Système matériel qui n'est soumis à l'action d'aucune force extérieure ou moléculaire.* — On a

$$\sum mv^2 = h \qquad \text{et} \qquad \int \sum mv\, ds = \int \sum mv^2\, dt = h(t_1 - t_0).$$

La durée du trajet sera un minimum ou un maximum, selon que les positions extrêmes seront suffisamment rapprochées ou éloignées l'une de l'autre.

2° *Point matériel qui se meut sur une surface sans être soumis à l'action d'une force extérieure.* — La vitesse v étant constante, on a

$$\int mv\, ds = mvs,$$

d'où $\delta s = 0$. Donc s sera minimum ou maximum dans les mêmes conditions que ci-dessus.

3° *De la réflexion et de la réfraction dans l'hypothèse de l'émission.* — Cette hypothèse, qui est complètement abandonnée, consiste à admettre que :

1° Une particule lumineuse se meut d'un mouvement rectiligne et uniforme dans un milieu homogène et que sa vitesse ne dépend que de la nature du milieu;

2° La particule reste dans son milieu si elle rencontre une surface réfléchissante.

Réflexion. — Supposons qu'une particule lumineuse, passant par un point A d'un milieu, arrive après avoir touché un plan réflecteur, en un autre point A_1 du milieu.

Soient I le point où le plan est touché par la particule; v la vitesse de la lumière.

Nous avons

$$\int v\,ds = v\,(\overline{AI} + \overline{A_1I}).$$

Il faut donc que $\overline{AI} + \overline{A_1I}$ soit un minimum, ce qui exige d'abord que I se trouve sur l'intersection PQ du plan réflecteur et du plan qui lui est mené normalement par la droite AA_1; car, s'il en était autrement, le chemin ci-dessus serait plus grand que celui qui passe par la projection de I sur PQ.

Soient a, a_1 les projections de A, A_1 sur PQ; i, i_1 les angles que forment AI, IA_1 avec la perpendiculaire en I à PQ.

En exprimant que

$$\overline{AI} + \overline{A_1I} = \frac{\overline{Aa}}{\cos i} + \frac{\overline{A_1a_1}}{\cos i_1}$$

est un maximum, on trouve

$$\overline{Aa}\,\frac{\sin i}{\cos^2 i}\,di + \overline{A_1a_1}\,\frac{\sin i_1}{\cos^2 i_1}\,di_1 = 0;$$

mais la relation

$$\overline{aI} + \overline{a_1I} = \overline{Aa}\tang i + \overline{A_1a_1}\tang i_1 = \text{const.}$$

donne

$$\overline{Aa}\,\frac{di}{\cos^2 i} + \overline{A_1a_1}\,\frac{di_1}{\cos^2 i_1} = 0;$$

d'où, par comparaison avec l'équation précédente, $\sin i = \sin i_1$.

Réfraction. — Nous supposerons ici que PQ est le plan de séparation de deux milieux dans lesquels les vitesses de la lumière sont v et v_1 et que A_1 se trouve dans le second milieu. En exprimant que

$$v \times \overline{AI} + v_1 \times \overline{A_1 I} = v \frac{\overline{Aa}}{\cos i} + v_1 \frac{\overline{A_1 a_1}}{\cos i_1}$$

est un minimum, on a

$$v \frac{\overline{Aa} \sin i}{\cos^2 i} di + v_1 \frac{\overline{A_1 a_1} \sin i_1}{\cos^2 i_1} di_1 = 0;$$

mais la relation

$$\overline{aI} + \overline{a_1 I} = \overline{Aa} \operatorname{tang} i + A_1 a_1 \operatorname{tang} i_1 = \text{const.}$$

donne

$$\frac{\overline{Aa}\, di}{\cos^2 i} + \frac{\overline{A_1 a_1}}{\cos^2 i_1} di_1 = 0;$$

par suite, en comparant à l'équation ci-dessus,

$$\frac{\sin i}{\sin i_1} = \frac{v_1}{v},$$

valeur inverse de celle à laquelle conduit l'hypothèse des ondulations.

35. *Stabilité de l'équilibre d'un système matériel.* — On dit qu'un système est en équilibre lorsque les forces qui sollicitent chacun de ses points matériels se neutralisent ou ne lui impriment pas d'accélération.

Pour qu'il y ait équilibre, il faut nécessairement que les points matériels occupent chacun une ou plusieurs positions déterminées.

Pour des déplacements arbitraires quelconques, on doit avoir (26)

$$(1) \qquad \sum (X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z) = 0.$$

Si l'on ne considère que des déplacements comparables avec les liaisons, les réactions des lignes et surfaces fixes disparaissent dans l'équation (1) et les équations (5) et (7) du n° 27, en supprimant les accélérations $\frac{d^2x}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, ..., feront connaître les coordonnées des points m, m', m'', ...

Dans le cas d'un potentiel U, l'équation (1) revient à la suivante

$$\delta U = 0. \tag{2}$$

qui exprime que, *pour qu'il y ait équilibre, il faut que les valeurs des coordonnées rendent le potentiel maximum ou minimum.*

La stabilité de l'équilibre consiste en ce que, *si l'on fait subir aux points matériels m, m', ... des déplacements aussi petits que l'on voudra, et si on leur imprime ensuite des vitesses v_0, v'_0, ... également aussi petites que l'on voudra, les déplacements restent toujours très petits.*

En supposant (29) les coordonnées exprimées au moyen des variables indépendantes u, u', ..., posons

$$U = F(u, u', \ldots). \tag{3}$$

Nous allons démontrer que *l'équilibre est stable si le potentiel est un maximum.*

Soient

$u + \chi_0$, $u' + \chi'_0$, ... les valeurs que prennent u, u', ... lorsqu'on a fait subir de petits déplacements aux points matériels m, m', ... avant de leur imprimer les petites vitesses v_0, v'_0, ...;

$u + \chi$, $u' + \chi'$, ... ce que deviennent les déplacements au bout du temps t;

v, v', ... les vitesses correspondantes.

On a

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{2}\left(\sum mv^2 - \sum mv_0^2\right) \\ &\quad = F(u+\chi, u'+\chi', \ldots) - F(u+\chi_0, u'+\chi'_0, \ldots). \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Si l'on pose

$$F(u+\chi, u'+\chi', \ldots) = F(u, u', \ldots) - \varphi(\chi, \chi', \ldots), \tag{5}$$

la fonction φ devra s'annuler avec les χ et, pour que la fonction

$$F(u, u', \ldots)$$

soit maximum, il faut qu'elle reste essentiellement positive

pour des valeurs absolues de $\chi, \chi', \ldots$ qui ne dépassent pas certaines limites $h, h', \ldots$; l'équation (4) devient

$$(6) \qquad \frac{1}{2}\left(\sum mv^2 - \sum mv_0^2\right) = \varphi(\chi_0, \chi'_0, \ldots) - \varphi(\chi, \chi', \ldots).$$

Supposons successivement dans $\varphi(\chi, \chi', \ldots)$

$\chi = \quad h$ et faisons varier χ' entre $-h'$ et h', χ'' entre $-h''$, h''', ...,
$\chi = -h$ » » »

Parmi toutes les valeurs algébriques que prendra $\varphi(\chi, \ldots)$, il y en aura une A qui sera plus petite que toutes les autres. En opérant de même pour $\chi' = h'$, $\chi' = -h'$, on obtiendra de même une plus petite valeur A' de $\varphi(\chi, \ldots)$, etc. Appelons B la plus petite des valeurs A, A', ... et posons

$$(7) \qquad C = \frac{1}{2}\sum mv_0^2 + \varphi(\chi_0, \chi'_0, \ldots);$$

l'équation (6) devient

$$\frac{1}{2}\sum mv^2 = -(B - C) + B - \varphi(\chi, \chi', \ldots).$$

Mais on peut prendre les χ_0 en grandeur et en signes et les v_0 assez petits pour que l'on ait $C < B$. Si donc au bout d'un certain temps les variables χ dépassaient leurs limites, il arriverait que

$$B - \varphi(\chi, \chi', \ldots) < 0,$$

et alors on aurait

$$\frac{1}{2}\sum mv^2 < 0,$$

ce qui est absurde. Il suit de là que les valeurs absolues des χ ne peuvent pas croître avec le temps au delà de certaines limites et que, par suite, l'équilibre est stable.

Soient M la masse d'un système de corps pesants réagissant les uns sur les autres; ζ la distance de son centre de gravité à un plan horizontal fixe. On a

$$U = Mg\zeta;$$

donc le système sera stable si son centre de gravité est le plus

bas possible. Exemples : balance, système d'une manivelle et d'une bielle articulée à la tige verticale d'un piston, etc.

36. *Des petits mouvements d'un système matériel à liaisons.* — Reprenons l'équation générale du mouvement

$$(1)\qquad \sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right) = \delta U.$$

Soient $u_1, u_2, \ldots, u_\nu$ les ν variables indépendantes au moyen desquelles on exprime toutes les coordonnées $x, y, z, x', \ldots$.

Supposons que, le système étant d'abord en équilibre stable, on fasse subir à ses éléments matériels de petits déplacements, puis qu'on leur imprime de petites vitesses ; ces éléments exécuteront, chacun par rapport à sa position d'équilibre, une série de petits mouvements que nous nous proposons d'étudier.

Soient

$x_0, y_0, z_0, x'_0, \ldots$ les valeurs initiales de $x, y, \ldots$ ou correspondant à l'équilibre ;

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ celles de $u_1, u_2, \ldots$;

$u_1 = \alpha_1 + \chi_1$, $u_2 = \alpha_2 + \chi_2, \ldots$ les valeurs des u_i à l'instant t, les quantités χ_i étant censées assez petites pour qu'on puisse en négliger les secondes puissances ;

a_i, b_i, c_i des fonctions de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ supposées connues.

Nous avons des valeurs de la forme

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= x_0 + a_1\chi_1 + a_2\chi_2 + \ldots, \\ y &= y_0 + b_1\chi_1 + b_2\chi_2 + \ldots, \\ z &= z_0 + c_1\chi_1 + c_2\chi_2 + \ldots, \\ x' &= x'_0 + a'_1\chi_1 + a'_2\chi_2 + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Si l'on porte ces valeurs dans l'équation (1), on trouve

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &\left(A_1\frac{d^2\chi_1}{dt^2} + A_{1,2}\frac{d^2\chi_2}{dt^2} + A_{1,3}\frac{d^2\chi_3}{dt^2} + \ldots\right)\delta\chi_1, \\ &+\left(A_{2,1}\frac{d^2\chi_1}{dt^2} + A_2\frac{d^2\chi_2}{dt^2} + A_{2,3}\frac{d^2\chi_3}{dt^2} + \ldots\right)\delta\chi_2 + \ldots = \delta U, \end{aligned}\right.$$

en posant

$$(4)\quad \begin{cases} A_i = \sum m(a_i^2 + b_i^2 + c_i^2), \\ A_{i,j} = \sum m(a_i a_j + b_i b_j + c_i c_j). \end{cases}$$

Si l'on développe $U(\alpha_1 + \chi_1, \alpha_2 + \chi_2, \ldots)$ suivant les puissances des χ_i en s'arrêtant aux secondes et remarquant que, d'après les conditions d'équilibre, la somme des termes du premier degré est nulle, on a

$$(5)\quad \begin{cases} U(\alpha_1 + \chi_1, \alpha_2 + \chi_2, \ldots) \\ \quad = U(\alpha_1, \alpha_2, \ldots) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha_1^2}\chi_1^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha_2^2}\chi_2^2 + \ldots \right. \\ \qquad\qquad \left. + 2\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}\chi_1\chi_2 + 2\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_3}\chi_1\chi_3 + \ldots\right), \end{cases}$$

d'où

$$\delta U = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha_1^2}\chi_1 + \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}\chi_2 + \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_3}\chi_3 + \ldots\right)\delta\chi_1 + \ldots.$$

L'équation (3) donne par suite, en identifiant les coefficients des $\delta\chi_i$,

$$(6)\quad \begin{cases} A_1 \frac{d^2\chi_1}{dt^2} + A_{1,2}\frac{d^2\chi_2}{dt^2} + A_{1,3}\frac{d^2\chi_3}{dt^2} + \ldots \\ \quad = \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha_1^2}\chi_1 + \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}\chi_2 + \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_3}\chi_3 + \ldots, \\ A_{2,1}\frac{d^2\chi_1}{dt^2} + A_2\frac{d^2\chi_2}{dt^2} + A_{2,3}\frac{d^2\chi_3}{dt^2} + \ldots \\ \quad = \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}\chi_1 + \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha_2^2}\chi_2 + \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_3}\chi_3 + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

En désignant par ρ, ε, h_1, h_2, ... des constantes, posons

$$(7)\qquad \chi_1 = h_1 \sin\sqrt{\rho}(t + \varepsilon), \qquad \chi_2 = h_2 \sin\sqrt{\rho}(t + \varepsilon).$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'équation (6), on trouve

$$(8)\quad \begin{cases} \rho(A_1 h_1 + A_{1,2}h_2 + \ldots) + \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha_1^2} h_1 + \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} h_2 + \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_3} h_3 + \ldots = 0, \\ \rho(A_{2,1}h_1 + A_2 h_2 + \ldots) + \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_1} h_1 + \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha_2^2} h_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

En éliminant $\nu - 1$ des rapports $\frac{h_2}{h_1}, \frac{h_3}{h_1}, \cdots$ entre ces équations, on obtiendra une équation en ρ du degré ν dont toutes les racines devront être réelles, positives et inégales, car autrement les χ_i renfermeraient des exponentielles, c'est-à-dire des termes croissant avec le temps; mais alors les déplacements ne resteraient plus très petits et l'équilibre, contrairement à ce que l'on a supposé, ne serait plus stable.

A chaque valeur de ρ correspondra un système de valeurs déterminées de $\frac{h_2}{h_1}, \frac{h_3}{h_1}, \cdots$ et deux arbitraires h_1 et ε. Soient $\rho, \rho', \ldots$ les racines de l'équation en ρ, et accentuons de la même manière les constantes correspondantes; le système des valeurs

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{l} \chi_1 = h_1 \sin\sqrt{\rho}\,(t+\varepsilon) + h'_1 \sin\sqrt{\rho'}\,(t+\varepsilon') + \ldots \\ \chi_2 = h_2 \sin\sqrt{\rho}\,(t+\varepsilon) + h'_2 \sin\sqrt{\rho'}\,(t+\varepsilon') + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

renfermant 2ν constantes arbitraires, sera la solution générale des équations (6).

Les constantes se détermineront par les conditions que $\chi_1, \chi_2, \ldots, \frac{d\chi_1}{dt}, \frac{d\chi_2}{dt}, \cdots$ ont des valeurs données pour $t = 0$.

Supposons que les valeurs initiales de chacun des $\chi_i, \frac{d\chi_i}{dt}$ soient des sommes algébriques et que l'on fasse correspondre les éléments de l'une et l'autre série de valeurs. Il est évident que χ_i se composera de la somme des seconds membres des équations (9) établis pour chaque couple de valeurs initiales. Les petits mouvements s'ajouteront, ce qui constitue ce que l'on appelle le *principe de la superposition des petits mouvements.*

Si, dans l'expression de la demi-force vive

$$\frac{1}{2}\sum m\left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}\right),$$

on substitue les valeurs (2) de $x, y, z, x', \ldots$ et que l'on ait

égard aux notations (4), on obtient

$$\frac{1}{2}\sum\left(A_i\frac{d\chi_i^2}{dt^2}+2A_{ij}\frac{d\chi_i}{dt}\frac{d\chi_j}{dt}\right).$$

En désignant par H le résultat de la substitution dans cette expression de h_i, h_j à $\frac{d\chi_i}{dt}$, $\frac{d\chi_j}{dt}$, on a

$$H=\frac{1}{2}\sum(A_ih_i^2+2A_{ij}h_ih_j).$$

Si P est le résultat de la substitution de h_i, h_j à χ_i, χ_j dans l'ensemble des termes du second ordre du développement (5), on a

$$P=\frac{1}{2}\sum\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2}h_i^2+2\frac{\partial^2 U}{\partial x_i\,\partial x_j}h_ih_j\right),$$

et les équations (8) prennent la forme

$$\rho\frac{\partial H}{\partial h_1}+\frac{\partial P}{\partial h_1}=0,$$
$$\rho\frac{\partial H}{\partial h_2}+\frac{\partial P}{\partial h_2}=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

d'où

$$\rho\sum\frac{\partial H}{\partial h_i}h_i+\sum\frac{\partial P}{\partial h_i}h_i=0.$$

Mais, comme H et P sont des fonctions homogènes du second degré des h_i, on a

$$\sum\frac{\partial H}{\partial h_i}h_i=2H,\qquad \sum\frac{\partial P}{\partial h_i}h_i=2P,$$

d'où

$$\rho=-\frac{P}{H}.$$

A des valeurs réelles de ρ doivent correspondre des valeurs réelles des h_i; la quantité H, par sa nature, est essentiellement positive. Pour que les valeurs de ρ soient positives, il faut que P soit négatif ou que la somme des termes du second ordre de la valeur (5) soit négative. Il suit de là que, pour que

les intégrales (8) soient admissibles ou que l'équilibre soit stable, il faut que $U(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ soit maximum, résultat conforme à celui que nous avons obtenu au numéro précédent.

Si $U(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ est minimum, les valeurs de ρ seront négatives, c'est-à-dire que les déplacements χ_i seront représentés par des sommes d'exponentielles et ne pourront, par suite, rester très petits. Il suit de là que, lorsque *le potentiel est minimum, l'équilibre est instable.*

CHAPITRE V.

SUR LA STATIQUE DES CORPS SOLIDES ET LES COURBES FUNICULAIRES.

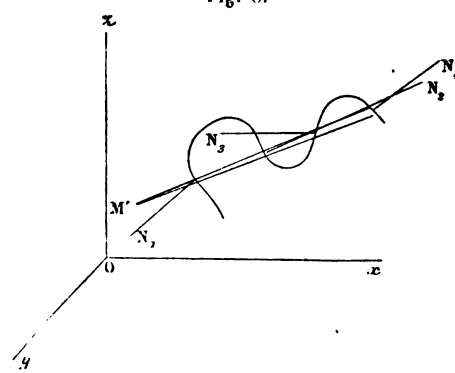
§ I. — *Attraction d'un ellipsoïde homogène sur un point.*

37. *Conventions.* — La définition de la *normale extérieure* en un point d'une surface terminant un volume se comprend d'elle-même.

L'*ouverture sphérique* d'un cône est la portion de la sphère d'un rayon égal à l'unité dont le centre est le sommet, interceptée par le cône.

Soient (*fig.* 8 et 9)

Fig. 8.



M' un point quelconque de l'espace;

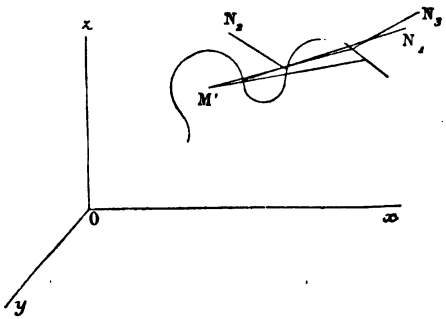
r_1, r_2, ... les rayons vecteurs partant de M', déterminés successivement sur une même direction par une surface fermée (S);

N_1, N_2, ... les normales extérieures correspondantes;

$d\omega$ l'ouverture sphérique infiniment petite d'un cône dont une génératrice coïncide avec la direction de $r_1, r_2, \ldots$;

$d\sigma_1, d\sigma_2, \ldots$ les éléments successifs de (S) déterminés par le cône;

Fig. 9.



$d\sigma$ un élément quelconque de (S) correspondant au rayon vecteur r et à la normale extérieure N.

Nous ne considérerons que l'attraction qui suit la loi de l'inverse du carré de la distance.

38. Théorèmes de Gauss.

I. *Valeurs de l'intégrale* $\int \frac{\cos(N, r)}{r^2} d\sigma$ *étendue à une surface fermée.*

1° *Le point* M' *est extérieur à la surface* (*fig.* 8).

L'élément de l'intégrale correspondant à $d\omega$ est

$$\frac{d\sigma_1}{r_1^2}\cos(N_1, r_1) + \frac{d\sigma_2}{r_2^2}\cos(N_2, r_2) + \ldots;$$

mais on a

$$\begin{aligned} r_1^2\, d\omega &= -\, d\sigma_1 \cos(N, r_1), \\ r_2^2\, d\omega &= +\, d\sigma_2 \cos(N, r_2), \\ r_3^2\, d\omega &= -\, d\sigma_3 \cos(N, r_3), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

La somme ci-dessus devient

$$-\, d\omega + d\omega - \ldots$$

et est nulle, puisque le nombre des $d\sigma_i$ est pair.

Il résulte de là que

$$(1) \qquad \int \frac{\cos(N.\,r)}{r^2}\,d\sigma = 0.$$

2° *Le point* M′ *est intérieur* (*fig.* 9).

En suivant la même marche que ci-dessus, on obtient

$$d\omega - d\omega + d\omega - \ldots$$

pour l'élément de l'intégrale correspondant à $d\omega$.

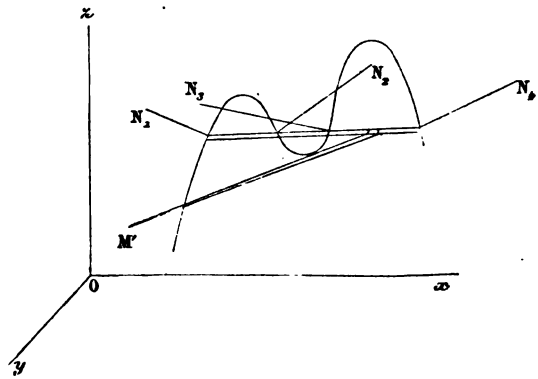
Mais, comme le nombre des $d\sigma_i$ est impair, cet élément se réduit à $d\omega$. Si donc on intègre, pour l'étendue de la sphère dont le rayon est l'unité et le centre M′, on obtient

$$(1') \qquad \int \frac{\cos(N.\,r)}{r^2}\,d\sigma = 4\pi.$$

II. *Composante* X *suivant* Ox *de l'attraction exercée sur le point* M′ *par un corps homogène.*

Première forme : Soient (*fig.* 10) $d\chi$ la section infiniment petite d'un cylindre, parallèle à Ox, traversant le corps; r la distance à M′ de l'élément $d\chi\,dx$ du cylindre.

Fig. 10.



Nous supposerons, par exception, que les normales N_1, N_2, ... se rapportent aux éléments $d\sigma_1$, $d\sigma_2$, ... découpés successivement, en partant du plan zOy, par le cylindre dans la surface.

On supposera que la masse M′ est égale à l'unité, ainsi que la densité du corps attirant.

On a, pour l'attraction exercée par $d\chi\, dx$ sur M′, estimée suivant Ox,

$$\frac{d\chi}{r^2}\, dx \cos(r, x) = \frac{d\chi}{r^2}\, dr,$$

et, pour le cylindre total,

$$-d\chi\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_4} - \frac{1}{r_3} + \ldots\right).$$

En remarquant que

$$d\chi = -d\sigma_1 \cos(N_1, x) = d\sigma_2 \cos(N_2, x) = -\ldots,$$

cette expression devient

$$-\left[\frac{d\sigma_1 \cos(N_1, x)}{r_1} + \frac{d\sigma_2 \cos(N_2, x)}{r_2} + \ldots\right],$$

et enfin on a

$$(2) \qquad X = -\int \frac{d\sigma \cos(N, x)}{r} = -\int \frac{d\sigma_x}{r},$$

en désignant par $d\sigma_x$ la projection de $d\sigma$ sur le plan yOz.

On a supposé sur la figure que M′ était extérieur à la surface (S). Mais il est facile de reconnaître qu'on arrive au même résultat lorsque M′ est intérieur. Il en est de même dans l'établissement de la formule suivante.

Seconde forme (*fig.* 11) : La composante suivant Ox de l'attraction exercée sur M′ par un élément du cône dont l'ouverture est $d\omega$ étant

$$\frac{r^2\, d\omega\, dr}{r^2} \cos(r, x) = d\omega\, dr \cos(r, x),$$

on a, pour le volume découpé par le cône,

$$d\omega(r_2 - r_1 + r_4 - r_3 + \ldots) \cos(r, x).$$

Si l'on remarque que

$$d\sigma_1 = -\frac{r_1^2\, d\omega}{\cos(N_1, r)}, \qquad d\sigma_2 = \frac{r_2^2\, d\omega}{\cos(N_2, r)}, \qquad \ldots,$$

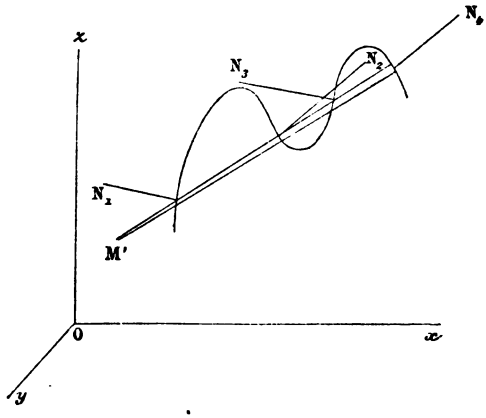
cette expression devient

$$\left[\frac{d\sigma_1}{r_1}\cos(N_1, r) + \frac{d\sigma_2}{r_2}\cos(N_2, r) + \ldots\right]\cos(r, x);$$

d'où l'on déduit

$$(2') \qquad X = \int \frac{d\sigma \cos(N, r)\cos(r, x)}{r}.$$

Fig. 11.



39. *Expression de l'aire élémentaire d'une surface en coordonnées curvilignes quelconques.* — Soient

$$F(x, y, z) = 0$$

l'équation de la surface; p, q deux variables auxiliaires.

On peut poser

$$x = f_1(p, q), \qquad y = f_2(p, q),$$

la fonction f_1 et f_2 étant choisies comme on l'entendra; mais la fonction

$$z = f_3(p, q)$$

sera déterminée.

Soient

m, m_1, m_2, m_3 les quatre points de la surface correspondant respectivement aux valeurs

$$(p, q), \quad (p + dp, q), \quad (p + dp, q + dq), \quad (p, q + dq);$$

$d\sigma$ l'aire du quadrilatère $mm_1m_2m_3$;
$d\sigma_z$ sa projection $nn_1n_2n_3$ sur le plan xOy.

On a

Pour les coordonnées de n..... x, y;

Pour les coordonnées de n_1.... $\begin{cases} x_1 = x + \dfrac{\partial x}{\partial p}\,dp, \\ y_1 = y + \dfrac{\partial y}{\partial p}\,dp; \end{cases}$

Pour les coordonnées de n_2.... $\begin{cases} x_2 = x + \dfrac{\partial x}{\partial p}\,dp + \dfrac{\partial x}{\partial q}\,dq, \\ y_2 = y + \dfrac{\partial y}{\partial p}\,dp + \dfrac{\partial y}{\partial q}\,dq; \end{cases}$

Pour les coordonnées de n_3.... $\begin{cases} x_3 = x + \dfrac{\partial x}{\partial q}\,dq, \\ y_3 = y + \dfrac{\partial y}{\partial q}\,dq; \end{cases}$

d'où [1]

$$(3)\quad \begin{cases} d\sigma_z = \left(\dfrac{\partial y}{\partial q}\,\dfrac{\partial x}{\partial p} - \dfrac{\partial x}{\partial q}\,\dfrac{\partial y}{\partial p}\right) dp\,dq \\ \text{et, de même,} \\ d\sigma_x = \left(\dfrac{\partial z}{\partial q}\,\dfrac{\partial y}{\partial p} - \dfrac{\partial y}{\partial q}\,\dfrac{\partial z}{\partial p}\right) dp\,dq, \\ d\sigma_y = \left(\dfrac{\partial x}{\partial q}\,\dfrac{\partial z}{\partial p} - \dfrac{\partial z}{\partial q}\,\dfrac{\partial x}{\partial p}\right) dp\,dq. \end{cases}$$

Considérons en particulier l'ellipsoïde dont l'équation est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Cette équation sera satisfaite en posant

$$(a)\qquad x = a\cos p, \qquad y = b\sin p\cos q, \qquad z = c\sin p\sin q.$$

Si l'on remarque que $x' = \dfrac{x}{a}$, $y' = \dfrac{y}{b}$, $z' = \dfrac{z}{c}$ sont les coor-

---

[1] Application de la formule connue :

$$\text{aire } n\,n_1n_2n_3 = \tfrac{1}{2}\,[(x - x_1)(y + y_1) + (x_1 - x_2)(y_1 + y_2) + (x_2 - x_3)(y_2 + y_3) + (x_3 - x)(y_3 + y)].$$

données d'un point de la sphère dont le rayon est égal à l'unité, on embrassera toute la surface de la sphère, par suite celle de l'ellipsoïde, en prenant o et π pour limites de p, et o et 2π pour celles de q.

On a

$$\frac{\partial x}{\partial p} = -a \sin p, \qquad \frac{\partial x}{\partial q} = 0,$$

$$\frac{\partial y}{\partial p} = b \cos p \cos q, \qquad \frac{\partial y}{\partial q} = -b \sin p \sin q,$$

$$\frac{\partial z}{\partial p} = c \cos p \sin q, \qquad \frac{\partial z}{\partial q} = c \sin p \cos q,$$

et les équations (3) donnent

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} d\sigma_x &= bc \sin p \cos p \, dp \, dq = \frac{bc}{a} x \sin p \, dp \, dq, \\ d\sigma_y &= ca \sin^2 p \cos q \, dp \, dq = \frac{ac}{b} y \sin p \, dp \, dq, \\ d\sigma_z &= ab \sin^2 p \sin q \, dp \, dq = \frac{ab}{c} z \sin p \, dp \, dq. \end{aligned} \right.$$

Soient M′ un point dont les coordonnées parallèles à Ox, Oy, Oz sont α, β, γ; r sa distance au point (x, y, z) de la surface On a

$$\cos(r, x) = -\frac{\alpha - x}{r}, \quad \cos(r, y) = -\frac{\beta - y}{r}, \quad \cos(r, z) = -\frac{\gamma - z}{r},$$

$$\cos(N, x) = \frac{d\sigma_x}{d\sigma} = \frac{bc}{a} x \sin p \frac{dp \, dq}{d\sigma},$$

$$\cos(N, y) = \frac{ac}{b} y \sin p \frac{dp \, dq}{d\sigma},$$

$$\cos(N, z) = \frac{ab}{c} z \sin p \frac{dp \, dq}{d\sigma},$$

et, comme

$$\begin{aligned} \cos(N, r) = {} & \cos(N, x) \cos(r, x) \\ & + \cos(N, y) \cos(r, y) + \cos(N, z) \cos(r, z), \end{aligned}$$

il vient, en substituant,

$$(5) \quad d\sigma \cos(N, r) = -\frac{abc}{r} \left[(\alpha - x) \frac{x}{a^2} + (\beta - y) \frac{y}{b^2} + (\gamma - z) \frac{z}{c^2} \right] \sin p \, dp \, dq.$$

On déduit de là

$$(5')\quad \left\{\begin{aligned} & d\sigma\cos(\mathrm{N}, r)\cos(r, x) \\ & = \frac{abc}{r^2}(\alpha - x)\left[(\alpha - x)\frac{x}{a^2} + (\beta - y)\frac{y}{b^2} + (\gamma - c)\frac{z}{c^2}\right]\sin p\, dp\, dq. \end{aligned}\right.$$

40. *Attraction d'un ellipsoïde sur un point* M'. — Si l'on pose

$$(6)\qquad \chi = \frac{\mathrm{X}}{abc},$$

les formules (2) et (4) donnent

$$(7)\qquad a\chi = -\frac{1}{bc}\int\frac{d\sigma_x}{r} = -\int_0^{\pi} dp\int_0^{2\pi}\frac{\sin p\cos p}{r}\,dq.$$

Posons encore

$$(8)\qquad a^2 - b^2 = k, \qquad a^2 - c^2 = k'$$

et supposons que l'on fasse varier a, b, c, de manière que k et k' restent constants. Nous obtiendrons une série d'ellipsoïdes homofocaux définis par la variable a.

En différentiant l'équation (7) par rapport à a, on trouve

$$(9)\qquad a\,d\chi + \chi\,da = \int_0^{\pi} dp\int_0^{2\pi}\frac{\sin p\cos p\,dq}{r^2}\,\frac{\partial r}{\partial a}\,da.$$

De

$$r^2 = (\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 + (\gamma - z)^2,$$

on tire

$$(b)\qquad r\frac{\partial r}{\partial a} = -\left[(\alpha - x)\frac{\partial x}{\partial a} + (\beta - y)\frac{\partial y}{\partial a} + (\gamma - z)\frac{\partial z}{\partial a}\right].$$

Les équations (a) donnent d'ailleurs

$$(c)\qquad \left\{\begin{aligned} & \frac{\partial x}{\partial a} = \cos p = \frac{x}{a}, \\ & \frac{\partial y}{\partial a} = \frac{db}{da}\sin p\cos q = \frac{y}{b}\frac{db}{da}, \\ & \frac{dz}{da} = \frac{dc}{da}\sin p\,\sin q = \frac{z}{c}\frac{dc}{da}, \end{aligned}\right.$$

et les équations (8)

$$(d) \qquad \frac{db}{da} = \frac{a}{b}, \qquad \frac{dc}{da} = \frac{a}{c}.$$

La valeur (b), eu égard à (c) et (d), devient

$$\begin{aligned} r\frac{\partial r}{\partial a} &= -\left[\frac{(\alpha - x)}{a^2}x + \frac{(\beta - y)}{b^2}y + \frac{(\gamma - z)}{c^2}z\right]a \\ &= -\left[\frac{(\alpha - x)}{a^2}x + \frac{(\beta - y)}{b^2}y + \frac{(\gamma - z)}{c^2}z\right]\frac{x}{\cos p}, \end{aligned}$$

et nous avons, au lieu de l'équation (9),

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} & a\,d\chi + \chi\,da \\ & = -da\int_0^{\pi} dp \int_0^{2\pi} \frac{x}{r^3}\left[\frac{(\alpha - x)}{a^2}x + \frac{(\beta - y)}{b^2}y + \frac{(\gamma - z)}{c^2}z\right]\sin p\,dq. \end{aligned} \right.$$

La formule (2′) nous donne, en ayant égard à (5′),

$$(11) \quad \chi = \int_0^{\pi} dp \int_0^{2\pi} \frac{\alpha - x}{r^3}\left[\frac{(\alpha - x)x}{a^2} + \frac{(\beta - y)y}{b^2} + \frac{(\gamma - z)z}{c^2}\right]\sin p\,dq,$$

et, en portant cette valeur dans le terme $\chi\,da$ de l'équation (10), on obtient

$$d\chi = -\frac{\alpha\,da}{a}\int_0^{\pi} dp \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^3}\left[\frac{(\alpha - x)x}{a^2} + \frac{(\beta - y)y}{b^2} + \frac{(\gamma - z)z}{c^2}\right]\sin p\,dq$$

ou encore, en vertu de la relation (5),

$$(12) \qquad d\chi = \frac{\alpha\,da}{a^2bc}\int \frac{\cos(N, r)}{r^2}\,d\sigma.$$

Nous avons maintenant deux cas à distinguer, en remarquant qu'il n'y a pas lieu de s'occuper de celui où M′ se trouve sur la surface de l'ellipsoïde, car alors on ne peut pas faire varier a sans que M′ devienne intérieur ou extérieur.

Premier cas : le point attiré est extérieur à l'ellipsoïde. — Le second membre de l'équation (12) est nul (théorème I de Gauss), c'est-à-dire que χ est indépendant de a. Nous avons

donc, en accentuant les lettres pour un second ellipsoïde homofocal du premier,

$$\frac{X}{abc} = \frac{X'}{a'b'c'}, \qquad \frac{Y}{abc} = \frac{Y'}{a'b'c'}, \qquad \frac{Z}{abc} = \frac{Z'}{a'b'c'},$$

et, en appelant R l'attraction $\overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z}$,

$$\frac{R}{abc} = \frac{R'}{a'b'c'}, \qquad \frac{X}{R} = \frac{X'}{R'}, \qquad \frac{Y}{R} = \frac{Y'}{R'}, \qquad \frac{Z}{R} = \frac{Z'}{R'}.$$

Donc :

1° *Les attractions de deux ellipsoïdes homofocaux sur un point extérieur ont la même direction et sont proportionnelles aux volumes de ces ellipsoïdes* (théorème de Maclaurin).

2° *La détermination de l'attraction d'un ellipsoïde sur un point extérieur se ramène à celle de l'ellipsoïde homofocal passant par ce point.*

Second cas : Le point attiré est intérieur. — Soient η et ζ des équivalents de χ pour Oy, Oz.

La formule (12) donne

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} & d\chi = 4\pi\alpha \frac{da}{a^2 bc} \\ & \text{et, de même,} \\ & d\eta = 4\pi\beta \frac{db}{b^2 ac} = 4\pi\beta \frac{da}{b^3 c}, \\ & d\zeta = 4\pi\gamma \frac{dc}{c^2 ac} = 4\pi\gamma \frac{da}{c^3 b}. \end{aligned}\right.$$

Si l'on fait croître a indéfiniment, b et c croissent aussi indéfiniment; mais, en vertu des relations (8), les rapports $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$ restent finis et tendent vers l'unité. On sait d'ailleurs que, quel que soit a, l'attraction de l'ellipsoïde sur un point intérieur se réduit à celle de l'ellipsoïde semblable passant par ce point. Il résulte de là que, si a croît indéfiniment, $X = abc\chi$, $Y = abc\eta$, $Z = abc\zeta$ restent finis et que χ, η, ζ sont nuls pour $a = \infty$.

Désignons par A, B, C les demi-axes d'un ellipsoïde dans l'intérieur duquel se trouve le point attiré, pour les distinguer des variables a, b, c, et posons

$$a = \frac{A}{u},$$

d'où

$$da = -\frac{A}{u^2}\,du,$$

et, en nous reportant aux relations (8), nous avons

$$b = \frac{A}{u}\sqrt{1 - \frac{ku^2}{A^2}}, \qquad c = \frac{A}{u}\sqrt{1 - \frac{k'u^2}{A^2}}.$$

Les limites de u seront 0 et $u = 1$ et correspondent respectivement à $a = \infty$ et à $a = A$, et les équations (13) nous donnent

$$\chi = -\frac{4\pi\alpha}{A^3}\int_0^1 \frac{u^2\,du}{\left(1 - \frac{ku^2}{A^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{k'u^2}{A^2}\right)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\eta = -\frac{4\pi\beta}{A^3}\int_0^1 \frac{u^2\,du}{\left(1 - \frac{ku^2}{A^2}\right)^{\frac{3}{2}}\left(1 - \frac{k'u^2}{A^2}\right)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\zeta = -\frac{4\pi\gamma}{A^3}\int_0^1 \frac{u^2\,du}{\left(1 - \frac{ku^2}{A^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{k'u^2}{A^2}\right)^{\frac{3}{2}}};$$

et nous avons, par suite,

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned}
X &= -4\pi\frac{ABC}{A^3}\alpha\int_0^1 \frac{u^2\,du}{\left(1 - \frac{ku^2}{A^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{k'u^2}{A^2}\right)^{\frac{1}{2}}},\\
Y &= -4\pi\frac{ABC}{A^3}\beta\int_0^1 \frac{u^2\,du}{\left(1 - \frac{ku^2}{A^2}\right)^{\frac{3}{2}}\left(1 - \frac{k'u^2}{A^2}\right)^{\frac{1}{2}}},\\
Z &= -4\pi\frac{ABC}{A^3}\gamma\int_0^1 \frac{u^2\,du}{\left(1 - \frac{ku^2}{A^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{k'u^2}{A^2}\right)^{\frac{3}{2}}},
\end{aligned}\right.$$

formules qui s'appliquent aussi au cas où le point attiré se trouve sur la surface.

41. *Composante de l'attraction d'un ellipsoïde sur un point extérieur.* — Nous supposerons que les formules (14) se rapportent à l'ellipsoïde homofocal de l'ellipsoïde donné passant par le point attiré, et nous affecterons de l'indice 1 les quantités qui sont relatives à ce dernier ellipsoïde.

Si nous remarquons que les formules (8) donnent

$$B^2 = A^2 - A_1^2 + B_1^2, \qquad C^2 = A^2 - A_1^2 + C_1^2,$$

nous avons, pour déterminer A^2, l'équation

$$\frac{\alpha^2}{A^2} + \frac{\beta^2}{A^2 - A_1^2 + B_1^2} + \frac{\gamma^2}{A^2 - A_1^2 + C_1^2} = 1,$$

équation qui n'a qu'une racine positive; les racines négatives se rapportent aux hyperboloïdes homofocaux.

Les formules (8) donnent

$$\frac{k}{A^2} = \frac{A_1^2 - B_1^2}{A_1^2}\,\frac{A_1^2}{A^2}, \qquad \frac{k'}{A^2} = \frac{A_1^2 - C_1^2}{A_1^2}\,\frac{A_1^2}{A^2}.$$

Si l'on pose

$$\frac{A_1 u}{A} = u_1,$$

et si l'on remarque que $X_1 = X\dfrac{A_1 B_1 C_1}{ABC}$, la première des équations (14) donne

$$X_1 = -4\pi\alpha\frac{A_1 B_1 C_1}{A_1^3}\int_0^{\frac{A_1}{A}} \frac{u_1^2\,du_1}{\left(1 + \frac{B_1^2 - A_1^2}{A_1^2}u_1^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{C_1^2 - A_1^2}{A_1^2}u_1^2\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Pour simplifier, nous remplacerons A par A′, nous supprimerons l'indice 1 pour u et les quantités qui se rapportent à l'ellipsoïde donné; enfin nous représenterons par $M = \frac{4}{3}\pi ABC$ la masse de cet ellipsoïde. Nous aurons alors

$$X = -\frac{3M\alpha}{A^3}\int_0^{\frac{A}{A'}} \frac{u^2\,du}{\left(1 + \frac{B^2 - A^2}{A^2}u_1^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{C^2 - A^2}{A^2}u_1^2\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Il est facile de voir, à l'inspection des formules (14), quelles sont les modifications qu'il faut apporter à cette valeur pour obtenir celles de Y, Z, que nous nous dispenserons d'écrire quant à présent.

Soient

$$A < B < C$$

et

$$\lambda^2 = \frac{B^2 - A^2}{A^2}, \qquad \lambda'^2 = \frac{C^2 - A^2}{A^2}; \tag{15}$$

il vient

$$\left\{\begin{aligned} X &= -\frac{3M\alpha}{A^3}\int_0^{\frac{A}{A'}} \frac{u^2\,du}{(1+\lambda^2u^2)^{\frac{1}{2}}(1+\lambda'^2u^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{3M\alpha}{A^3}L,\\ Y &= -\frac{3M\beta}{A^3}\int_0^{\frac{A}{A'}} \frac{u^2\,du}{(1+\lambda^2u^2)^{\frac{3}{2}}(1+\lambda'^2u^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{3M\beta}{A^3}\frac{\partial\lambda L}{\partial\lambda},\\ Z &= -\frac{3M\gamma}{A^3}\int_0^{\frac{A}{A'}} \frac{u^2\,du}{(1+\lambda^2u^2)^{\frac{1}{2}}(1+\lambda'^2u^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{3M\gamma}{A^3}\frac{\partial\lambda' L}{\partial\lambda'}. \end{aligned}\right. \tag{16}$$

Le calcul se réduit donc à trouver la valeur de L; mais l'intégration ne peut s'effectuer que dans les cas particuliers suivants.

42. *Cas d'un ellipsoïde de révolution aplati.* — On a $B = C$ ou $\lambda' = \lambda$; on peut faire passer le plan xOy par le point M', que l'on supposera, pour plus de simplicité, situé sur la surface. Il vient ainsi

$$X = -\frac{3M\alpha}{A^3}\int_0^1 \frac{u^2\,du}{1+\lambda^2u^2} = -\frac{3M\alpha}{\lambda^3A^3}(\lambda - \operatorname{arc\,tang}\lambda),$$

$$Y = -\frac{3M\beta}{A^3}\int_0^1 \frac{u^2\,du}{(1+\lambda^2u^2)^2} = -\frac{3M\beta}{2\lambda^3A^3}\left(\operatorname{arc\,tang}\lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right).$$

$$Z = 0.$$

Supposons que l'ellipsoïde soit très peu aplati ou que λ soit très petit. Nous avons, en nous arrêtant aux termes du cin-

quième ordre,

$$\operatorname{arc\,tang}\lambda = \lambda - \frac{\lambda^3}{3} + \frac{\lambda^5}{5}, \qquad \frac{\lambda}{1+\lambda^2} = \lambda - \lambda^3 + \lambda^5;$$

par suite,

$$X = -\frac{M\alpha}{A^3}\left(1 - \frac{3}{5}\lambda^2\right),$$

$$Y = -\frac{M\beta}{A^3}\left(1 - \frac{6}{5}\lambda^2\right).$$

Soient $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$; G l'attraction $\overline{X} + \overline{Y}$. On a, aux termes du quatrième ordre près,

$$G = \frac{M}{A^3}\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\left(1 - \frac{3}{5}\lambda^2\frac{\alpha^2+2\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\right) = \frac{Mr}{A^3}\left[1 - \frac{3}{5}\lambda^2\left(2 - \frac{\alpha^2}{r^2}\right)\right].$$

Désignons par l la latitude du point M', c'est-à-dire l'angle formé avec Oy par la normale en ce point. De l'équation

$$(a) \qquad (1+\lambda^2)\alpha^2 + \beta^2 = A^2(1+\lambda^2)$$

de la méridienne, on déduit

$$\operatorname{tang} l = -\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{1+\lambda^2}{\beta}\alpha,$$

et l'on a, aux termes en λ^2 près,

$$\sin l = \frac{\alpha}{r};$$

il vient donc

$$G = \frac{Mr}{A^3}\left[1 - \frac{3}{5}\lambda^2(2 - \sin^2 l)\right];$$

mais l'équation (a) peut se mettre successivement sous les deux formes suivantes

$$r^2 + \alpha^2\lambda^2 = A^2(1+\lambda^2), \qquad r^2(1+\lambda^2\sin^2 l) = A^2(1+\lambda^2),$$

d'où

$$r = A\left(1 + \frac{1}{2}\lambda^2\cos^2 l\right).$$

Enfin, en substituant et réduisant, on obtient

$$(b) \qquad G = \frac{M}{A^2}\left(1 - \frac{3}{5}\lambda^2\right)\left(1 - \frac{\lambda^2}{10}\cos^2 l\right).$$

Cette formule s'applique à l'attraction de la Terre, supposée homogène, sur un point situé à la surface; mais il faut en retrancher la composante verticale $\frac{4\pi^2}{T^2} R \cos^2 l$ de l'accélération centrifuge, T étant la durée de la révolution diurne et R le rayon terrestre moyen; nous avons ainsi une relation de la forme

$$g = H\left(1 - \frac{\lambda^2}{10}\cos^2 l\right) - \frac{4\pi^2}{T^2} R \cos^2 l.$$

On a

$$\frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{86400}, \qquad \lambda^2 = \frac{1}{300} \text{ (aplatissement)}, \qquad 2\pi R = 40\,000\,000^{\text{m}},$$

et à Paris,

$$g = 9{,}8088 \quad \text{pour} \quad l = 48^\circ{,}51,$$

ce qui permet de déterminer la constante H, et l'on trouve ainsi

$$g = 9{,}8249 - 0{,}0371 \cos^2 l,$$

tandis que, d'après l'observation, on devrait avoir

$$g = 9{,}831084 - 0{,}050057 \cos^2 l.$$

La différence entre ces deux valeurs tient à ce que la Terre est loin d'être homogène, contrairement à ce qu'on a supposé.

43. *Cas d'un ellipsoïde de révolution allongé.* — On a $A = B$ ou $\lambda = 0$, et, en faisant passer le plan xOz par M',

$$X = -\frac{3M\alpha}{A^3}\int_0^1 \frac{u^2\,du}{(1+\lambda'^2u^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= -\frac{3M\alpha}{2\lambda'^3A^3}\left[\lambda'\sqrt{1+\lambda'^2} - \log\left(\lambda' + \sqrt{1+\lambda'^2}\right)\right],$$

$$Z = -\frac{3M\gamma}{A^3}\int_0^1 \frac{u^2\,du}{(1+\lambda'^2u^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= -\frac{3M\gamma}{\lambda'^3A^3}\left[\log\left(\lambda' + \sqrt{1+\lambda'^2} - \frac{\lambda'}{1+\lambda'^2}\right)\right].$$

44. *Attraction d'un cylindre elliptique indéfini sur un point de sa surface.* — Soit Oz l'axe du cylindre.

Dans les formules (16), on devra faire

$$\frac{A}{A'} = 1 \qquad \text{et} \qquad M = \frac{4}{3}\pi A^3 (1+\lambda^2)^{\frac{1}{2}} (1+\lambda'^2)^{\frac{1}{2}};$$

puis, ces substitutions faites, on supposera $\lambda' = \infty$. Il vient ainsi

$$X = -4\pi\alpha(1+\lambda^2)^{\frac{1}{2}} \int_0^1 \frac{u\,du}{(1+\lambda^2 u^2)^{\frac{1}{2}}} = -4\pi\alpha \left[\frac{(1+\lambda^2)-(1+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}}{\lambda^2}\right],$$

$$Y = -4\pi\beta(1+\lambda^2)^{\frac{1}{2}} \int_0^1 \frac{u\,du}{(1+\lambda^2 u^2)^{\frac{3}{2}}} = -4\pi\beta \left[\frac{-1+(1+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}}{\lambda^2}\right].$$

Si l'on pose

$$\frac{B}{A} = \varepsilon,$$

on a

$$\lambda^2 = \varepsilon^2 - 1$$

et

$$X = -4\pi\alpha \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}, \qquad Y = -4\pi\gamma \frac{1}{1+\varepsilon},$$

formules qui sont celles de Laplace.

45. *Solide homogène de plus grande attraction sur un point extérieur.* — « Quelle est la forme que doit avoir le solide, dont le volume est donné, pour qu'il exerce la plus grande attraction possible sur un point extérieur M′, dont la position reste d'ailleurs indéterminée? »

Tel est le problème que s'est proposé de résoudre le marquis de Saint-Jacques [1] et dont nous allons chercher à donner une solution plus ou moins rigoureuse.

Il faut d'abord que M′ se trouve sur la surface du corps. Admettons, en effet, qu'il en soit autrement, et soient A, B les intersections la plus rapprochée et la plus éloignée de la direction de l'attraction F avec la surface. En reportant de B en A un même élément de volume, la direction de cette attraction n'aura pas changé, mais son intensité aura augmenté, ce qui est contraire à ce que l'on a supposé.

---

[1] Académie des Sciences, *Mémoires des Savants étrangers*, 1749.

Cela établi, soient

n, n_1 deux éléments de volume situés dans la région de la surface du corps;

F′ l'attraction sur M′ du volume dont on aurait enlevé les deux éléments ci-dessus;

$d\alpha$ l'angle compris sous F et F′;

f, f_1 les composantes suivant la direction de F des attractions de n, n_1 sur M′;

f', f'_1 leurs composantes normales à cette direction;

φ, φ_1 les angles formés par f', f'_1 avec la direction opposée à celle de la composante $F' d\alpha = F d\alpha$ normale à F.

On a, aux termes du second ordre près,

$$F = F' + f + f_1,$$
$$f' \sin\varphi = f'_1 \sin\varphi_1,$$
$$F' d\alpha = f' \cos\varphi + f'_1 \cos\varphi_1.$$

Supposons que f soit plus grand que f_1 et faisons coïncider n_1 avec n; F deviendra, aux termes du second ordre près,

$$F_1 = \sqrt{(F' + 2f)^2 + (F d\alpha - 2f' \cos\varphi)^2 + 4f'^2 \sin^2\varphi} = F' + 2f.$$

Or

$$F < F' + 2f;$$

par suite,

$$F_1 > F.$$

Donc, il faut que $f = f_1$ ou, en d'autres termes, que *tous les points matériels de même masse de la surface donnent la même composante de l'attraction, suivant la direction de l'attraction totale.*

Soient maintenant

M′x la direction de F, qui sera nécessairement un axe de révolution de la surface;

r, $(r, x) = \theta$ les coordonnées polaires d'un point quelconque de la section méridienne;

K^2 une constante.

Nous aurons

$$\frac{\cos\theta}{r^2} = \frac{1}{K^2} \quad (^1);$$

d'où

$$(1) \qquad \begin{aligned} r &= K\sqrt{\cos\theta}, \\ x &= K\cos\theta\sqrt{\cos\theta}, \\ y &= K\sin\theta\sqrt{\cos\theta}. \end{aligned}$$

Le maximum de y correspond à

$$\cos\theta = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

et a pour valeur

$$y = \frac{K}{3}\sqrt{2\sqrt{3}} = 0,6204\,K.$$

La valeur correspondante de x est

$$x = 0,4388\,K.$$

Il suit de là que la surface a à peu près la forme d'un œuf dont le gros bout serait en M'.

Proposons-nous maintenant de déterminer le volume du

---

(1) Si l'on retient seulement des idées ingénieuses du marquis de Saint-Jacques, que le point M' doit se trouver sur la surface du corps attirant et que cette surface doit être de révolution autour de la direction M'x de F, le reste se déduit immédiatement du calcul des variations. On a, en effet,

$$F = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} r\sin\theta\cos\theta\,d\theta,$$

et pour le volume du corps

$$2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^3}{3}\sin\theta\,d\theta = \text{const.}$$

En désignant par K^2 une constante, on a donc à rendre maximum l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\left(\frac{r^3}{3} - K^2 r\cos\theta\right)d\theta,$$

et on voit que l'on doit avoir

$$r^3 = K^2\cos\theta.$$

solide, en désignant par ψ l'angle formé par un plan méridien quelconque avec un méridien fixe. Le volume d'un cône élémentaire, dont le sommet est M′, est

$$\frac{r^3}{3}\, d\theta \sin\theta\, d\psi:$$

d'où, en intégrant par rapport à ψ, de o à 2π, puis remplaçant r par sa valeur (1),

$$-\frac{2}{3}\pi K^3 (\cos\theta)^{\frac{3}{2}}\, d\cos\theta.$$

En intégrant de nouveau entre les limites o et $\frac{\pi}{2}$ de θ, on obtient, pour le volume cherché,

$$\frac{4}{15}\pi K^3 = \frac{4}{3}\pi\left(K\sqrt[3]{\frac{1}{5}}\right)^3.$$

Il suit de là que ce volume est équivalent à celui d'une sphère ayant pour rayon

$$(2) \qquad a = K\sqrt[3]{\frac{1}{5}} = 0,5848\, K;$$

d'où

$$(2') \qquad K = a\sqrt[3]{5} = 1,710a.$$

L'attraction du cône élémentaire ci-dessus étant

$$r\, d\theta \sin\theta\, d\psi,$$

sa composante suivant M′x est

$$r\, d\theta \sin\theta\, d\psi\, d\theta = -r\, d\cos\theta \cos\theta\, d\psi,$$

et, en intégrant par rapport à ψ entre o et 2π, puis remplaçant r par sa valeur (1), il vient

$$-2\pi K (\cos\theta)^{\frac{3}{2}}\, d\cos\theta.$$

Si l'on intègre maintenant par rapport à θ, entre les limites o et $\frac{\pi}{2}$, on trouve, pour l'attraction résultante,

$$F = \frac{4}{5}\pi K = \frac{4}{5}\pi a\sqrt[3]{5}.$$

Pour l'attraction de la sphère dont le rayon est a sur un point de sa surface, on aurait

$$F_1 = \frac{4}{3}\pi a;$$

d'où

$$\frac{F}{F_1} = \frac{3}{5}\sqrt[3]{5} = 1,026.$$

Il suit de là que la sphère, sous un volume donné, exerce sensiblement la plus grande attraction possible.

§ II. — *Courbes funiculaires.*

46. Soient

$P\,ds$ la force qui sollicite un élément ds d'un fil dont les coordonnées sont x, y, z;

X, Y, Z les composantes de P parallèles à Ox, Oy, Oz;

T la tension au point (x, y, z);

$\rho = \frac{ds}{\varepsilon}$ le rayon de courbure;

$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}$, $\cos\beta = \frac{dy}{ds}$, $\cos\gamma = \frac{dz}{ds}$ les cosinus des angles que forment la tangente avec Ox, Oy, Oz;

$\cos\lambda = \frac{d\cos\alpha}{\varepsilon}$, $\cos\mu = \frac{d\cos\beta}{\varepsilon}$, $\cos\nu = \frac{d\cos\gamma}{\varepsilon}$ les cosinus semblables relatifs à la normale principale.

On a les formules connues

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{dT\cos\alpha}{ds} + X = 0,\\ &\frac{dT\cos\beta}{ds} + Y = 0,\\ &\frac{dT\cos\gamma}{ds} + Z = 0.\end{aligned}\right.$$

Si l'on ajoute ces équations, multipliées respectivement par $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, on trouve

$$(2)\qquad \frac{dT}{ds} + X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma = 0$$

ou

$$(2') \qquad \frac{dT}{ds} + P_t = 0,$$

en désignant par P_t la composante tangentielle de P, équation à laquelle on est immédiatement conduit par une considération géométrique (t. I).

L'équation (2) peut se mettre sous la forme

$$(3) \qquad dT + X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0,$$

et l'on obtiendra immédiatement T en fonction de x, y, z, si P dérive d'un potentiel.

On déduit des équations (1)

$$\frac{d\cos\alpha}{\varepsilon}\,\frac{dT\cos\alpha}{ds} + \frac{d\cos\beta}{\varepsilon}\,\frac{dT\cos\beta}{ds} + \frac{d\cos\gamma}{\varepsilon}\,\frac{dT\cos\gamma}{ds} + X\cos\lambda + Y\cos\mu + Z\cos\nu = 0$$

ou, en développant et désignant par P_n la composante de P suivant la normale principale,

$$\frac{1}{2\varepsilon}\,\frac{dT}{ds}\,d(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) + \frac{T}{\varepsilon\,ds}\left[(d\cos\alpha)^2 + (d\cos\beta)^2 + (d\cos\gamma)^2\right] + P_n = 0,$$

et enfin

$$(4) \qquad \frac{T}{\rho} + P_n = 0,$$

équation à laquelle on arrive aussi immédiatement par une considération géométrique (t. I).

On déduit des deux premières équations (1)

$$x\,\frac{dT\,\frac{dy}{ds}}{ds} - y\,\frac{dT\,\frac{dx}{ds}}{ds} + Yx - Xy = 0.$$

En développant l'ensemble des deux premiers termes de

cette équation, on trouve

$$\begin{aligned}
&\frac{dT}{ds}\left(x\frac{dy}{ds}-y\frac{dx}{ds}\right)+T\left(x\frac{d^2y}{ds^2}-y\frac{d^2x}{ds^2}\right)\\
&=\frac{dT}{ds}\left(x\frac{dy}{ds}-y\frac{dx}{ds}\right)+T\frac{d}{ds}\left(x\frac{dy}{ds}-y\frac{dx}{ds}\right)\\
&=\frac{d}{ds}T\left(x\frac{dy}{ds}-y\frac{dx}{ds}\right).
\end{aligned}$$

Il vient donc

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d}{ds}T\left(x\frac{dy}{ds}-y\frac{dx}{ds}\right)+Yx-Xy=0,\\
&\text{et de même}\\
&\frac{d}{ds}T\left(y\frac{dz}{ds}-z\frac{dy}{ds}\right)+Zy-Yz=0,\\
&\frac{d}{ds}T\left(z\frac{dx}{ds}-x\frac{dz}{ds}\right)+Xz-Zx=0.
\end{aligned}\right.$$

Si, par exemple, $Yx-Xy$ est nul ou est une fonction de s, la première de ces équations donnera une intégrale première des équations (1) et, si l'équation (3) peut s'intégrer, on n'aura plus qu'à considérer l'une des équations (1).

Mais, dans un certain nombre de problèmes, comme nous allons le faire voir, il est plus simple de traiter directement la question que d'avoir recours aux équations (1) ou à celles qui en dérivent.

47. *Cas où les forces élémentaires sont parallèles à une même direction.* — La force $P\,ds$ étant comprise dans le plan de deux tensions consécutives, c'est-à-dire dans le plan osculateur, la courbe est plane.

Nous prendrons son plan pour celui des xy, en dirigeant Oy en sens inverse de la direction de P.

La courbe aura évidemment un point minimum m_0 par lequel on fera passer Oy.

Soient

$Om_0=y_0$;

T_0, T les tensions en m_0 et en un point quelconque m dont les coordonnées sont x et y;

α l'inclinaison de la tangente en m sur Ox;
s l'arc $m_0 m$.

En projetant les forces qui sollicitent l'arc $m_0 m$ sur Ox et sur la normale en m, on a

$$T \cos\alpha = T_0, \tag{6}$$

$$T_0 \sin\alpha = \cos\alpha \int_0^s P\,ds, \tag{6'}$$

d'où

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{1}{T_0}\int_0^s P\,ds, \tag{7}$$

$$P\,ds = T_0 \frac{d\alpha}{\cos^2\alpha}, \tag{7'}$$

$$\left\{\begin{aligned} P\,dx &= T_0 \frac{d\alpha}{\cos\alpha}, \\ P\,dy &= T_0 \frac{\sin\alpha\,d\alpha}{\cos^2\alpha}. \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Nous avons maintenant deux cas à examiner :

1° P *ne dépend que de* y. — La seconde des équations (8) donne par l'intégration

$$\frac{1}{\cos\alpha} - 1 = \frac{1}{T_0}\int_{y_0}^{y} P\,dy,$$

et, en posant

$$M = 1 + \frac{1}{T_0}\int_{y_0}^{y} P\,dy,$$

on a

$$\operatorname{tang}\alpha = \sqrt{M^2 - 1} = \frac{dy}{dx},$$

d'où

$$x = \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\sqrt{M^2 - 1}},$$

et la solution du problème sera donnée par une double quadrature.

2° P *ne dépend que de* x. — La première des équations (8) donne par l'intégration

$$\frac{1 + \sin\alpha}{\cos\alpha} = e^{\frac{1}{T_0}\int_0^x P\,dx};$$

d'où, en représentant par N le second membre de cette égalité,

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{N^2 - 1}{2N} = \frac{dy}{dx}$$

et enfin

$$y - y_0 = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{N^2 - 1}{N}\,dx.$$

48. *Fil sollicité par des forces verticales proportionnelles aux projections horizontales des arcs élémentaires.* — Supposons que Ox soit horizontal et qu'on place l'origine en m_0; en désignant par p une constante, nous ferons $P\,ds = p\,dx$ dans l'équation (7) qui devient

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{px}{T_0} = \frac{dy}{dx},$$

d'où

$$y = \frac{px^2}{2T_0},$$

équation d'une parabole dont l'axe est vertical.

49. *De la chaînette.* — On sait que cette courbe est la forme qu'affecte un fil pesant. Soit p le poids de l'unité de longueur du fil. L'équation (7), en y faisant $P = p$ et posant

$$\frac{T_0}{p} = a,$$

devient

$$(a) \qquad s = a \operatorname{tang}\alpha;$$

on déduit de là

$$(b) \qquad ds = \frac{a}{\cos^2\alpha}\,d\alpha,$$

et, pour le rayon de courbure,

$$(b') \qquad \rho = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{a}{\cos^2\alpha}.$$

Nous avons maintenant

$$dy = ds \sin\alpha = a\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}\,d\alpha,$$

d'où, en prenant $m_0 O = a$,

$$(c) \qquad y = \frac{a}{\cos\alpha}.$$

Il vient ensuite

$$dx = ds\cos\alpha = a\frac{d\alpha}{\cos\alpha},$$

d'où

$$(d) \qquad x = a\log\left(\operatorname{tang}\alpha + \frac{1}{\cos\alpha}\right)$$

et

$$(e) \qquad \operatorname{tang}\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}}{2}.$$

On déduit de là, pour l'équation de la chaînette,

$$(f) \qquad y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

Comme cette équation ne renferme qu'un seul paramètre a, on voit que toutes les chaînettes sont semblables.

Des équations (a) et (e) on déduit

$$(g) \qquad s = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

Soit $\mathcal{A}$ l'aire comprise entre Ox, Om_0 et une ordonnée quelconque; on a, en ayant égard à la valeur (c) de y,

$$(h) \qquad \mathcal{A} = \int_0^x y\,dx = a\int_0^x \frac{dx}{\cos\alpha} = a\int_0^s ds = as.$$

Nous renverrons au Chapitre VI du Tome I pour l'énoncé des propriétés géométriques de la chaînette résultant de l'interprétation des formules (c), (b) et (h), ainsi que pour l'étude de la tractrice et de la forme d'une voile de navire.

Soient

y_1 l'ordonnée du centre de gravité de l'aire déterminée par deux ordonnées symétriques par rapport à Oy;

s l'arc intercepté;

y_2 l'ordonnée de son centre de gravité.

On a, en se rappelant que $dx = \frac{a\,d\alpha}{\cos\alpha}$ et ayant égard aux valeurs (c), (b) et (h),

$$asy_1 = 2\int_0^s y\,dx\,\frac{y}{2} = a^2\int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\cos^3\alpha},$$

$$sy_2 = 2\int_0^s y\,ds = 2a^2\int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\cos^3\alpha},$$

d'où

$$y_1 = \frac{y_2}{2},$$

et une nouvelle propriété qu'il est facile de traduire en langage ordinaire.

Nous allons maintenant déterminer les éléments d'une chaînette lorsque l'on se donne les positions m_1, m_2 des deux points d'attache, le premier étant censé plus élevé que l'autre, ainsi que la longueur l de la chaînette entre ces deux points.

Soient

n_1, n_2 les projections de m_1, m_2 sur l'axe Ox dont la position est inconnue comme celle de O;

h, k les distances verticale et horizontale de m_1, m_2;

$y_1 = m_1 n_1$, $y_2 = m_2 n_2$.

Nous avons

$$h = y_1 - y_2.$$

Désignons par l' la longueur qu'aurait l'arc de chaînette si m_2 était le sommet, longueur qu'il est inutile de calculer, comme on le verra ci-après.

Si $l < l'$, l'origine O se trouvera en dehors de la distance $n_2 n_1$, au delà de n_2 et en posant $x_1 = On_1$, $x_2 = On_2$, on aura

$$x_2 = x_1 - k,$$

puis

$$(i)\quad \begin{cases} h = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x_1}{a}} + e^{-\frac{x_1}{a}} - e^{\frac{x_1-k}{a}} - e^{-\frac{x_1-k}{a}}\right), \\ l = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x_1}{a}} - e^{-\frac{x_1}{a}} - e^{\frac{x_1-k}{a}} + e^{-\frac{x_1-k}{a}}\right). \end{cases}$$

Si $l > l'$, le point O se trouvera entre n_1 et n_2, et l'on aura

$$x_2 = k - x_1,$$

puis

$$h = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x_1}{a}} + e^{-\frac{x_1}{a}} - e^{\frac{k-x_1}{a}} - e^{-\frac{k-x_1}{a}}\right),$$

$$l = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x_1}{a}} - e^{-\frac{x_1}{a}} + e^{\frac{k-x_1}{a}} - e^{-\frac{k-x_1}{a}}\right),$$

équations identiques aux précédentes, lesquelles feront par suite connaître x_1 et a.

Selon que l'on obtiendra $x_1 \gtrless k$, le point O se trouvera en dehors de la droite $n_1 n_2$, du côté de n_2, ou entre les deux points n_1, n_2.

En substituant

$$(j) \qquad u = e^{\frac{x_1}{a}}, \quad \alpha = e^{\frac{k}{a}},$$

aux inconnues x_1 et a, les équations (i) deviennent

$$(k) \qquad \begin{cases} (u^2 - \alpha)(\alpha - 1) = \dfrac{2h\alpha u}{a}, \\ (u^2 + \alpha)(\alpha - 1) = \dfrac{2l\alpha u}{a}; \end{cases}$$

d'où par division

$$(l) \qquad \alpha = u^2 \frac{l-h}{l+h}.$$

En portant cette valeur dans la première des équations (k), on trouve

$$u^2 \frac{l-h}{l+h} - 1 = \frac{l-h}{a} u.$$

Mais de la seconde des équations (j), en ayant égard à la valeur (l), on tire

$$(m) \qquad \frac{1}{a} = \frac{1}{k} \log \alpha = \frac{1}{k} \log u^2 \frac{l-h}{l+h},$$

et l'on a par suite, pour déterminer u,

$$u^2 \frac{l-h}{l+h} - 1 = \frac{l-h}{k} u \log u^2 \frac{l-h}{l+h}.$$

Les équations (l), (m) feront ensuite connaître α et a. On aura enfin

$$x_1 = a \log u, \qquad y_1 = \frac{a}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right),$$

ce qui déterminera la position du sommet de la courbe.

50. *Forme d'équilibre d'un fil dont les éléments sont sollicités par des forces proportionnelles à une fonction de la distance à un axe fixe, normales à cet axe.* — Soient

Oz l'axe;
r la distance d'un point m de la courbe à cet axe;
θ l'angle formé par le plan zOm avec le plan zOx;
$f'(r)$ la force extérieure considérée comme positive si elle est dirigée de Oz vers m.

En désignant par A une constante, l'équation (3) du n° 46 nous donne

$$(a) \qquad T = -f(r) + A.$$

Le second terme de la première des équations (5) du même numéro étant nul, nous avons, en représentant par B une autre constante,

$$T\left(\frac{x\,dy - y\,dx}{ds}\right) = B$$

ou

$$T r^2 \frac{d\theta}{ds} = B.$$

En élevant au carré et remarquant que

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2,$$

on trouve

$$(b) \qquad r^2 \frac{d\theta^2}{dr^2}\left[T^2 r^2 - B^2\right] = B^2\left(1 + \frac{dz^2}{dr^2}\right).$$

La troisième des équations (1) du n° 46 nous donne, en désignant par C une troisième constante,

$$T\frac{dz}{ds} = C,$$

d'où, en élevant au carré et en remplaçant ds^2 par son expression,

$$(c) \qquad \frac{dz^2}{dr^2} = \frac{C^2}{T^2 - C^2}\left(r^2\frac{d\theta^2}{dr^2} + 1\right).$$

En portant cette valeur dans l'équation (b), on trouve.

$$d\theta = \frac{B\,dr}{\pm r\sqrt{r^2(T^2 - C^2) - B^2}},$$

d'où, par l'élimination de T au moyen de l'équation (a),

$$(A) \qquad d\theta = \frac{B\,dr}{\pm r\sqrt{r^2\{[A - f(r)]^2 - C^2\} - B^2}}.$$

L'équation (c) donne, par suite,

$$(B) \qquad dz = \frac{C\,r\,dr}{\pm\sqrt{r^2\{[A - f(r)]^2 - C^2\} - B^2}}.$$

La solution du problème se ramène ainsi à deux quadratures.

L'intégration des équations (A) et (B) introduira deux nouvelles constantes M et N. Nous avons donc à déterminer les cinq constantes A, B, C, M, N.

Nous affecterons respectivement des indices 1 et 2 les coordonnées r, θ, z des extrémités du fil, qui, comme la longueur l de ce fil, sont des données de la question. En exprimant que

$$\theta = \theta_1, \qquad z = z_1 \quad \text{pour } r = r_1,$$
$$\theta = \theta_2, \qquad z = z_2 \quad \text{pour } r = r_2,$$
$$l = \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{r^2\frac{d\theta^2}{dr^2} + \frac{dz^2}{dr^2} + 1}\,dr,$$

nous aurons les cinq équations qui permettront de déterminer les constantes.

Si les extrémités du fil se trouvent dans le plan zOx, la courbe sera comprise dans ce plan et B sera nul. On aura ainsi, pour l'équation différentielle de la courbe,

$$(B') \qquad dz = \frac{C\,dr}{\pm\sqrt{[A - f(r)]^2 - C^2}}.$$

Dans le cas où les deux extrémités du fil se trouvent dans le

plan xOy, on a $C = 0$ et

$$(A') \qquad d\theta = \frac{B\,dr}{\pm r\sqrt{\{r[A - f(r)]\}^2 - B^2}}$$

pour l'équation différentielle de la courbe.

Supposons que les plans zOx, zOy tournent uniformément autour de Oz en entraînant le fil avec eux. Si nous désignons par μ^2 la moitié du carré de la vitesse angulaire, nous avons, pour le potentiel de la force centrifuge,

$$f(r) = \mu^2 r^2,$$

et, en posant $r^2 = u$, les équations (A) et (B) deviennent

$$(A_1) \qquad d\theta = \frac{B\,du}{\pm 2u\sqrt{u[(A - \mu^2 u)^2 - C^2] - B^2}},$$

$$(B_1) \qquad dz = \frac{C\,du}{\pm 2\sqrt{u[(A - \mu^2 u)^2 - C^2] - B^2}},$$

et leurs intégrales dépendent des fonctions elliptiques.

51. *Fil d'égale résistance.* — On désigne ainsi un fil dont la section ω varie avec s, de telle manière que la tension rapportée à la section soit une constante donnée k. On a donc à déterminer la fonction de s qui représente ω et la forme de l'axe du fil.

Soient χ, η, ζ les composantes suivant Ox, Oy, Oz de la force extérieure qui agit sur l'unité de section. Nous devrons supposer, dans les formules établies au n° 46,

$$T = k\omega, \qquad X = \omega\chi, \qquad Y = \omega\eta, \qquad Z = \omega\zeta;$$

mais nous nous bornerons à considérer le cas où la force extérieure est parallèle à l'axe Oy, en la supposant dirigée en sens inverse de la partie positive de cet axe.

Nous ferons ainsi $P = \omega\eta$, $T_0 = k\omega_0$ dans les formules (6) et (7) du n° 47, en désignant par ω_0 la section au point le plus bas m_0. Nous aurons ainsi

$$(1) \qquad \omega\cos\alpha = \omega_0,$$

$$(2) \qquad \operatorname{tang}\alpha = \frac{1}{k\omega_0}\int_0^s \omega\eta\,ds;$$

d'où, par l'élimination de α,

$$\sqrt{\omega^2 - \omega_0^2} = \frac{1}{k}\int_0^s \omega\eta\, ds$$

et successivement

$$\frac{d\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}} = \frac{1}{k}\eta\, ds,$$

$$\log\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1}\right) = -\frac{1}{k}\int_0^s \eta\, ds.$$

Si nous posons

$$(3) \qquad Q = e^{-\frac{1}{k}\int_0^s \eta\, ds}.$$

nous aurons

$$(4) \qquad \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{Q^2 + 1}{2Q},$$

d'où, en vertu de la relation (1),

$$(5) \qquad \frac{dx}{ds} = \frac{2Q}{Q^2 + 1}$$

pour l'équation différentielle de l'axe du fil.

Comme premier exemple, considérons le cas de la pesanteur et désignons par p le poids spécifique du fil; le poids de l'élément $\omega\, ds$ étant $p\omega\, ds$, nous devons supposer $\eta = p$, et nous aurons, en posant $\frac{p}{k} = \frac{1}{a}$,

$$Q = e^{-\frac{s}{a}},$$

$$(6) \qquad \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{s}{a}} + e^{-\frac{s}{a}}\right),$$

$$dx = \frac{2\, ds}{e^{\frac{s}{a}} + e^{-\frac{s}{a}}} = \frac{2e^{\frac{s}{a}}\, ds}{e^{\frac{2s}{a}} + 1},$$

$$(7) \qquad x = 2a\left(\operatorname{arc\,tang} e^{\frac{s}{a}} - \frac{\pi}{4}\right),$$

puis

$$y = \int \sqrt{1 - \frac{dx^2}{ds^2}}\, ds = y_0 + \int_0^s \sqrt{1 - \frac{4e^{\frac{2s}{a}}}{\left(e^{\frac{2s}{a}} + 1\right)^2}}\, ds$$

$$= y_0 + \int_0^s \frac{e^{\frac{s}{a}} - e^{-\frac{s}{a}}}{e^{\frac{s}{a}} + e^{-\frac{s}{a}}}\, ds$$

ou

$$(8) \qquad y = a \log\left(e^{\frac{s}{a}} + e^{-\frac{s}{a}}\right)$$

en prenant

$$y_0 = a \log 2,$$

et le problème se trouve résolu.

Supposons maintenant que $\eta\, ds$ soit de la forme $p\, dx$, p étant une constante; en posant $\frac{p}{k} = \frac{1}{a}$, nous aurons

$$Q = e^{-\frac{x}{a}},$$

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

$$\frac{dx}{ds} = \frac{2}{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}},$$

$$s = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\,\frac{e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}}{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}$$

et

$$y = y_0 + \frac{a}{2} \log \frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2},$$

et tous les éléments de la question sont déterminés.

52. *Du mouvement d'un fil.* — Nous conserverons les notations du n° 46, à cette exception près que nous représen-

terons par $\varepsilon P\,ds$, au lieu de $P\,ds$, la force extérieure qui agit sur ds, en désignant par ε la masse de l'unité de longueur du fil.

La coordonnée x sera fonction de t et de s, et, comme s reste invariable, les composantes suivant Ox de la vitesse et de l'accélération de ds seront respectivement $\frac{\partial x}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$. Nous aurons donc, pour les équations cherchées,

$$\frac{\partial T \cos\alpha}{\partial s} + \varepsilon\left(X - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right) = 0,$$
$$\frac{\partial T \cos\beta}{ds} + \varepsilon\left(Y - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right) = 0,$$
$$\frac{\partial T \cos\gamma}{ds} + \varepsilon\left(Z - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right) = 0.$$

Ces équations, dans toute leur généralité, sont trop compliquées pour qu'on puisse en tirer parti. Aussi nous bornons-nous à considérer le cas où le fil est compris dans un plan xOy.

Soient

v, u	les composantes	de la vitesse ds,	suivant la tangente et le rayon de courbure.
φ, ψ	»	de l'accélération de ds,	
Φ, Ψ	»	de P,	

Nous pouvons prendre, pour les équations du mouvement,

$$\frac{\partial T}{\partial s} + \varepsilon(\Phi - \varphi) = 0,$$
$$T\frac{\partial \alpha}{\partial s} + \varepsilon(\Psi - \psi) = 0;$$

d'où, par l'élimination de T,

$$(\Psi - \psi)\frac{\partial^2 \alpha}{\partial s^2} + (\Phi - \varphi)\frac{\partial \alpha^2}{\partial s^2} - \frac{\partial \alpha}{\partial s}\frac{\partial}{\partial s}(\Psi - \psi) = 0.$$

Nous avons

$$(a)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial t} = v\cos\alpha - u\sin\alpha, \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial t} = v\sin\alpha + u\cos\alpha, \end{cases}$$

$$\varphi = \frac{\partial(v\cos\alpha - u\sin\alpha)}{\partial t}\cos\alpha + \frac{\partial(v\sin\alpha + u\cos\alpha)}{\partial t}\sin\alpha = \frac{\partial v}{\partial t} - u\frac{\partial\alpha}{\partial t},$$

$$\psi = -\frac{\partial(v\cos\alpha - u\sin\alpha)}{\partial t}\sin\alpha + \frac{\partial(v\sin\alpha + u\cos\alpha)}{\partial t}\cos\alpha = \frac{\partial u}{\partial t} + v\frac{\partial\alpha}{\partial t},$$

et l'équation précédente devient

$$\left(\Psi - \frac{\partial u}{\partial t} - v\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)\frac{\partial^2\alpha}{\partial s^2} + \left(\Phi - \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)\frac{\partial\alpha^2}{\partial s^2}$$
$$- \frac{\partial\alpha}{\partial s}\frac{\partial}{\partial s}\left(\Psi - \frac{\partial u}{\partial t} - v\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right) = 0.$$

En différentiant les équations (a) par rapport à s, on obtient

$$\frac{\partial\cos\alpha}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial s}\cos\alpha - v\sin\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial s} - \frac{\partial u}{\partial s}\sin\alpha - u\cos\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial s},$$

$$\frac{\partial\sin\alpha}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial s}\sin\alpha + v\cos\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial s}\cos\alpha - u\sin\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial s}.$$

En ajoutant ces équations respectivement multipliées par $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, puis par $-\sin\alpha$, $\cos\alpha$, on trouve

$$(2) \qquad \frac{\partial v}{\partial s} - u\frac{\partial\alpha}{\partial s} = 0,$$

$$(3) \qquad \frac{\partial u}{\partial s} + v\frac{\partial\alpha}{\partial s} - \frac{\partial\alpha}{\partial t} = 0.$$

Les équations (1), (2), (3) entre les inconnues u, v, α et les variables s et t seront celles du mouvement. Nous y étions parvenu, au Tome I, pages 321 et suiv., par des considérations géométriques, mais qui sont plus difficiles à suivre que l'analyse précédente. Nous renverrons à ce Volume pour les applications des équations ci-dessus.

§ III. — *Questions diverses.*

53. *Centre de gravité d'un tronc de prisme droit triangulaire.* — Nous prendrons respectivement pour plan horizontal et pour plan vertical de projection (*fig.* 13) le plan de la base ABC et celui d'une face latérale $C'c'b'B'$.

Soient

(ABC, $a'b'c'$) la troncature;

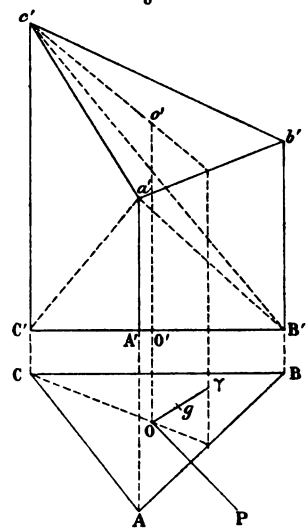
(O, O'), (O, o') les centres de gravité de l'aire B de la base et de celle de la troncature;

$h = A'a'$, $h' = B'b'$, $h'' = C'c'$ les longueurs des trois arêtes;

$H = \frac{h + h' + h''}{3}$ la distance $O'o'$.

Décomposons le volume en trois tétraèdres par deux plans

Fig. 12.



l'un mené par les sommets (C, C'), (A, a'), (B, B'); l'autre par les sommets (A, a'), (B, B'), (C, c'). Pour simplifier, nous désignerons les tétraèdres par leurs sommets et leurs bases en projection verticale, placés entre parenthèses.

Soient x, x', x'' les distances des sommets A, B, C à une droite quelconque OP menée par le point O dans le plan ABC; x_1 la distance semblable de la projection horizontale g du centre de gravité cherché G.

Nous avons

$$(a) \qquad x + x' + x'' = 0$$

et, pour les moments par rapport au plan (OP, Oo') des volumes,

$$(a', \mathrm{A'B'C'}) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{\mathrm{B}h}{3}\,\frac{2x+x'+x''}{4},$$

$$(a', \mathrm{B'}\,b'\,c') \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{\mathrm{B}h'}{3}\,\frac{2x'+x+x''}{4},$$

$$(a', \mathrm{C'}\,\mathrm{B'}\,c') \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{\mathrm{B}h''}{3}\,\frac{2x''+x+x'}{4},$$

d'où, en faisant la somme, qui doit être égale à $\mathrm{BH}x_1$, et ayant égard à la relation (a),

$$\mathrm{H}x_1 = \frac{hx+h'x'+h''x''}{12}.$$

Soient μ le centre de gravité des longueurs h, h', h'', considérées comme masses concentrées en A, B, C, et dont nous déterminerons plus loin la position; χ sa distance à la droite OP; nous avons

$$(h+h'+h'')\chi = hx+h'x'+h''x'',$$

d'où

$$x_1 = \frac{\chi}{4}.$$

On voit ainsi que g se trouve sur Oμ et au quart de la distance de O à μ.

La hauteur z_1 du centre de gravité (G, g) au-dessus de ABC sera donnée par

$$\mathrm{BH}z_1 = \frac{\mathrm{B}h}{3}\,\frac{h}{4} + \frac{\mathrm{B}h'}{3}\,\frac{h+h'+h''}{4} + \frac{\mathrm{B}h''}{3}\,\frac{h+h''}{4},$$

d'où

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{h^2+h'^2+h''^2+hh'+hh''+h'h''}{12\mathrm{H}} \\ &= \frac{h^2+h'^2+h''^2+(h+h'+h'')^2}{24\mathrm{H}} \\ &= \frac{3}{8}\mathrm{H}\left\{1+\frac{1}{\mathrm{H}^2}\left[\left(\frac{h}{3}\right)^2+\left(\frac{h'}{3}\right)^2+\left(\frac{h''}{3}\right)^2\right]\right\}. \end{aligned}$$

Soient

$$h = \mathrm{H}+\zeta, \qquad h' = \mathrm{H}+\zeta', \qquad h'' = \mathrm{H}+\zeta'';$$

il vient, en remarquant que $\zeta + \zeta' + \zeta'' = 0$,

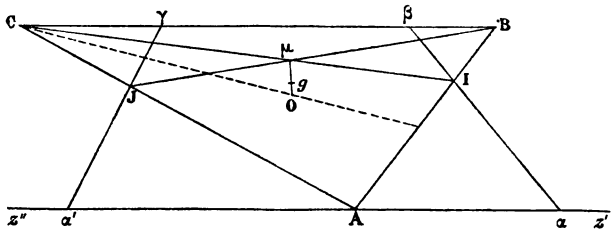
$$z_1 = \frac{H}{2} + \frac{1}{24H}(\zeta^2 + \zeta'^2 + \zeta''^2) > \frac{H}{2};$$

d'où il suit que le centre de gravité du tronc est plus élevé que celui du prisme qui aurait $O'o'$ pour hauteur.

Il ne nous reste plus maintenant qu'à déterminer la position du point μ.

Soient (*fig.* 13)

Fig. 13.



Az', Az'' les portions de la parallèle à CB menée en A, situées du côté de B et C;

$A\alpha$, $B\beta$ deux longueurs proportionnelles à h', h portées sur Az' et BC à partir de A et de B;

I l'intersection de $\alpha\beta$ avec AB et qui sera le centre de gravité de h, h'.

Soient, de même,

$A\alpha'$, $C\gamma$ des longueurs proportionnelles à h'', h portées de A vers z'' et de C vers B;

J l'intersection de AC avec $\alpha'\gamma$ ou le centre de gravité de h et h''.

Il est évident que le point μ sera l'intersection des droites BJ et CI.

54. *Théorème de Sluse.* — Soient (*fig.* 14)

un cercle décrit sur le diamètre $OA = a$;

n, p les intersections d'un rayon vecteur partant de O, incliné de l'angle θ sur OA, avec le cercle et avec sa tangente en A;

$Om = np$ porté sur On;

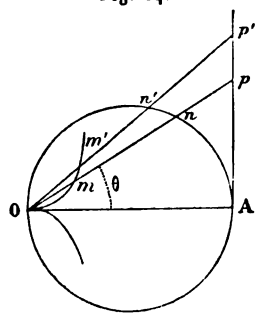
n', p', m' les positions que prennent n, p, m quand θ augmente de $d\theta$;

$$r' = Op = \frac{a}{\cos\theta},$$

$$r = Om = Op - On = \frac{a}{\cos\theta} - a\cos\theta = \frac{a\sin^2\theta}{\cos\theta}.$$

On sait que le lieu de m est une cissoïde qui a Ap pour asymptote.

Fig. 14.



Le moment de l'aire $pmm'p'$ par rapport à Ap est

$$\frac{r'^2\,d\theta}{2}\,\frac{a}{3} - \frac{r^2}{2}\,d\theta\,\frac{a + 2(a - r\cos\theta)}{3} = \frac{a^3}{6}(1 + \sin^2\theta - 2\sin^4\theta)\,d\theta.$$

Le moment semblable relatif à l'aire nOn' a aussi pour valeur

$$\frac{\overline{On}^2}{2}\,d\theta\,\frac{a + 2(a - On\cos\theta)}{3} = \frac{a^3}{6}(1 + \sin^2\theta - 2\sin^4\theta)\,d\theta.$$

Ces deux moments étant égaux, il résulte d'un théorème de Guldin que *le volume du tore engendré par le cercle tournant autour de l'asymptote est égal au volume engendré de la même manière par la cissoïde.*

Remarque. — L'aire, limitée par les deux branches de la courbe et l'asymptote, est

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (r'^2 - r^2)\,d\theta = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^4\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta = \frac{3\pi a^2}{4},$$

c'est-à-dire que cette aire est égale au triple de celle du cercle.

55. *Théorème de Pappus.* — Soient

AA'A''... un polygone fermé plan ou gauche;

m la masse de points matériels identiques partant simultanément des sommets avec les vitesses de même sens ka, ka' proportionnelles aux côtés $AA' = a$, $A'A'' = a'$, ...;

(x_0, y_0, z_0), (x'_0, y'_0, z'_0), ... les coordonnées rectangulaires des sommets;

x_1, y_1, z_1 les coordonnées du centre de gravité des masses m au bout du temps t.

On a

$$x_1 \Sigma m = \Sigma m[x_0 + ka\cos(a, x).t] = \Sigma m x_0 + mt\Sigma a\cos(a, x).$$

Mais, puisque le polygone est fermé, $\Sigma a\cos(a, x) = 0$; on a par suite

$$x_1 = \frac{m\Sigma x_0}{\Sigma m} = \text{const.}$$

et, de même,

$$y_1 = \text{const.}, \qquad z_1 = \text{const.}$$

Le centre de gravité des masses m reste donc fixe.

56. *Sur le moment d'inertie d'un volume de révolution par rapport à son axe.* — Soient $d\omega$ un élément de l'aire Ω de la section méridienne; r sa distance à l'axe Oz.

Le moment d'inertie de la couronne engendrée par $d\omega$ étant $2\pi r\, d\omega . r^2$, on a, pour le volume total,

$$(1) \qquad I = 2\pi\int r^3 d\omega = 2\pi\int r^3\, dr\, dz.$$

Soient $R = f(z)$, $R_0 = f_0(z)$ les limites extérieure et intérieure de r, on a

$$I = \frac{\pi}{2}\int(R^4 - R_0^4)\, dz = \frac{\pi}{2}\int[f(z)^4 - f_0(z)^4]\, dz.$$

Si l'aire génératrice coupait Oz, cette formule donnerait la différence des moments d'inertie des volumes déterminés

par les deux portions de cette aire, ou le moment d'inertie de la croûte solide engendrée par la différence des aires de ces parties.

Lorsque le profil est extérieur à Oz, il peut être avantageux d'employer une formule spéciale que nous allons faire connaître.

Soient

$k = GI$ la distance à Oz du centre de gravité G de Ω;
Gx le prolongement de IG, Gy la parallèle à Oz menée en G;
x la distance de $d\omega$ à Gy.

On a

$$r^3 = (k + x)^3 = k^3 + 3k^2x + 3kx^2 + x^3,$$

et, en remarquant que $\int x\,d\omega = 0$, la formule (1) devient

$$(2) \qquad I = 2\pi\left(k^3\Omega + 3k\int x^2\,d\omega + \int x^3\,d\omega\right),$$

expression dont la première intégrale est le moment d'inertie de Ω par rapport à Oy.

Si Oy est un axe de symétrie de Ω, la seconde intégrale est nulle.

57. *Du frottement dans la vis à filet triangulaire.* — Nous supposerons que l'axe Oz de la vis est vertical et que pour l'observateur couché suivant cet axe en ayant les pieds en bas, l'hélice directrice s'élève en allant de la droite vers la gauche.

Soient (*fig.* 15)

r_0 le rayon du noyau;
i_0 l'inclinaison de l'hélice sur la section droite;
$z_0 = r_0 \operatorname{tang} i_0 \theta$ l'ordonnée du point m_0 de cette hélice;
δ l'inclinaison du profil du filet sur les génératrices;
m un point quelconque (r, θ, z) du profil passant par m_0;
$m\eta$ la perpendiculaire au plan méridien de m, dans le sens de droite à gauche.

On a

$$r - r_0 = (z - z_0)\operatorname{tang}\delta = (z - \theta r_0 \operatorname{tang} i_0)\operatorname{tang}\delta$$

ou

$$(1)\qquad -r - \theta r_0 \operatorname{tang} i_0 \operatorname{tang} \delta + z \operatorname{tang} \delta + r_0 = 0.$$

Si mN est la normale en m et si l'on pose

$$(2)\qquad \operatorname{tang} \lambda = \operatorname{tang} i_0 \sin \delta,$$

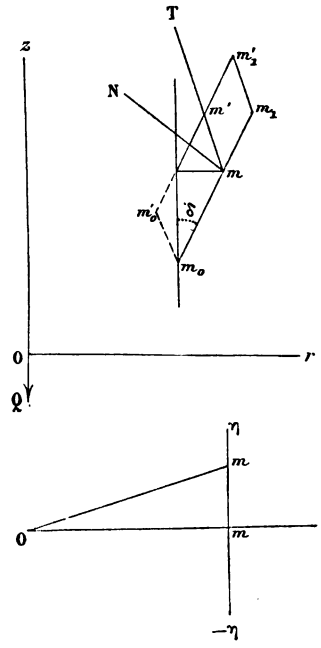
on a

$$(3)\qquad \begin{cases} \cos(\mathrm{N}, r) = -\dfrac{r_0 \operatorname{tang} \lambda}{\sqrt{r^2 + r_0^2 \operatorname{tang}^2 \lambda}}, \\ \cos(\mathrm{N}, z) = \dfrac{r \sin \delta}{\sqrt{r^2 + r_0^2 \operatorname{tang}^2 \lambda}}. \end{cases}$$

Soient

m'_0 un point infiniment voisin de m_0 de l'hélice directrice

Fig. 15.



m' le point du profil, passant par m'_0, situé à la même distance r de Oz que m;

mT la direction de mm'.

Les projections de mm' sur η et Oz, m étant respectivement $r\,d\theta$, $\frac{\partial z}{\partial \theta}\,d\theta = r_0 \operatorname{tang} i_0\,d\theta$, on a

$$(4)\quad \begin{cases} \cos(T, \eta) = \dfrac{r}{\sqrt{r^2 + r_0^2 \operatorname{tang}^2 i_0}}, \\ \cos(T, z) = \dfrac{r_0 \operatorname{tang} i_0}{\sqrt{r^2 + r_0^2 \operatorname{tang}^2 i_0}}. \end{cases}$$

Soient m_1, m'_1 les points de $m_0 m$, $m'_0 m'$ situés à la distance $r + dr$ de Oz; $d\omega$ l'élément superficiel $m m' m'_1 m_1$.

On a

$$(5)\quad \begin{cases} d\omega \cos(N, z) = r\,d\theta\,dr, \quad \text{d'où} \quad d\omega, \\ d\omega \cos(T, z) = \dfrac{r_0 \operatorname{tang} i_0}{\sin \delta} \sqrt{\dfrac{r^2 + r_0^2 \operatorname{tang}^2 \lambda}{r^2 + r_0^2 \operatorname{tang}^2 i_0}}\,dr\,d\theta, \\ -r\,d\omega \cos(N, \eta) = -\dfrac{r^2}{\sin \delta} \sqrt{\dfrac{r^2 + r_0^2 \operatorname{tang}^2 \lambda}{r^2 + r_0^2 \operatorname{tang}^2 i_0}}\,dr\,d\theta, \\ -r\,d\omega \cos(T, \eta) = \dfrac{r r_0 \operatorname{tang} \lambda}{\sin \delta}\,dr\,d\theta = r r_0 \operatorname{tang} i_0\,dr\,d\theta). \end{cases}$$

Supposons maintenant que la vis soit sollicitée suivant son axe par un poids Q; soit $\mathfrak{M}$ le moment du couple horizontal qu'il faut appliquer à la tête pour que le glissement de haut en bas soit sur le point d'avoir lieu ou, s'il a lieu, que le moment soit uniforme. Le sens positif de $\mathfrak{M}$ sera de la droite vers la gauche. Désignons par p la réaction normale par unité de surface de l'écrou sur le filet. Les réactions $p\,d\omega$, $fp\,d\omega$ faisant équilibre à Q et $\mathfrak{M}$, Q sera égal à l'intégrale de la somme des deux premières équations (5) multipliées respectivement par p, fp; $\mathfrak{M}$ sera aussi la somme des deux autres multipliées de la même manière. Les intégrations par rapport à θ à partir de o s'effectuent immédiatement, et, si r_1 est le rayon extérieur du filet, on trouve

$$(6)\quad \begin{cases} Q = p\theta \left[\dfrac{r_1^2 - r_0^2}{2} + \dfrac{f r_0 \operatorname{tang} i_0}{\sin \delta} \displaystyle\int_{r_0}^{r_1} \sqrt{\dfrac{r^2 + r_0^2 \operatorname{tang}^2 \lambda}{r^2 + r_0^2 \operatorname{tang} i_0}}\,dr \right], \\ \mathfrak{M} = p\theta \left[\dfrac{r_0 (r_1^2 - r_0^2)}{2} \operatorname{tang} i_0 - \dfrac{f}{\sin \delta} \displaystyle\int_{r_0}^{r} \sqrt{\dfrac{r^2 + r_0^2 \operatorname{tang}^2 \lambda}{r^2 + r_0^2 \operatorname{tang} i_0}}\,r^2\,dr \right], \end{cases}$$

d'où le rapport $\frac{\mathfrak{M}}{Q}$, qui est indépendant de p et θ; p se déduira de Q et sera d'autant plus petit que θ sera plus grand; c'est pourquoi pour les fortes charges, et pour ne pas s'exposer à briser la matière, on doit donner beaucoup de tours à la vis. D'ailleurs p est donné *a priori* (6^{kg} par millimètre carré pour le fer, 4^{kg} pour la fonte), d'où θ est le nombre de spires.

L'intégration ne peut s'effectuer que si $\lambda = i_0$ ou $\delta = 90^\circ$, cas de la vis à filet rectangulaire, sur lequel on reviendra. Mais on peut procéder par approximation.

Soient

$R = \frac{r_1 + r_0}{2}$ le rayon moyen du filet;
$2Re = r_1 - r_0$ sa largeur;
$2R\varepsilon = r - r_0$;

d'où

$$r_0 = R(1 - e), \qquad r_1 = R(1 + e), \qquad r = R(1 + 2\varepsilon - e).$$

Les limites de ε substitué à r sont o, e; mais, comme e atteint au plus $\frac{1}{20}$, on peut en négliger le carré, par suite celui de ε.

On a ainsi

$$\sqrt{\frac{r^2 + r_0^2 \operatorname{tang}^2\lambda}{r^2 + r_0^2 \operatorname{tang}^2 i_0}} = \frac{\cos i_0}{\cos\lambda}\left[\begin{array}{l} 1 - (2\varepsilon - e - e\operatorname{tang}^2 i_0)\cos^2 i_0 \\ + (2\varepsilon - e - e\operatorname{tang}^2\lambda)\cos^2\lambda \end{array}\right],$$

$$\int_{r_0}^{r} \sqrt{\frac{r^2 + r_0^2 \operatorname{tang}^2\lambda}{r^2 + r_0^2 \operatorname{tang}^2 i_0}}\, dr = \frac{2R\cos i_0}{\cos\lambda}\, e,$$

$$\int_{r_0}^{r} \sqrt{\frac{r^2 + r_0^2 \operatorname{tang}^2\lambda}{r^2 + r_0^2 \operatorname{tang}^2 i_0}}\, r^2\, dr = \frac{2R^3\cos i_0}{\cos\lambda}\, e;$$

d'où

$$(7) \qquad \frac{\mathfrak{M}}{QR} = \frac{(1 - e)\operatorname{tang} i_0 - \dfrac{f\cos i_0}{\sin\delta\cos\lambda}}{1 + f(1 - e)\dfrac{\sin i_0}{\sin\delta\cos\lambda}}.$$

Cas de la vis à filet rectangulaire. — On a $\delta = 90^\circ$, $\lambda = i_0$,

et les équations (6) donnent

$$\frac{\mathfrak{M}}{Q} = \frac{R r_0 \tang i_0 - \frac{f}{3}(r_1^2 + r_0 r_1 + r_1^2)}{R + f r_0 \tang i_0}$$

ou, en négligeant e^2,

$$\frac{\mathfrak{M}}{QR} = \frac{(1-e)\tang i_0 - f}{1 + f(1-e)\tang i_0}.$$

Dans la discussion de cette équation, nous négligerons encore e, comme on le fait d'habitude, et, en désignant par α l'angle de frottement, elle se réduit à

$$(8) \qquad \frac{\mathfrak{M}}{QR} = \tang(i_0 - \alpha).$$

On voit que $\mathfrak{M}$ est positif si $i_0 > \alpha$, nul pour $i_0 = \alpha$, et alors Q fait équilibre au frottement, négatif si $i_0 < \alpha$, c'est-à-dire qu'il faudra agir sur la vis pour la faire descendre.

Dans le cas où Q, au lieu d'être un poids, est une résistance verticale, il faudra changer le signe des $p\,d\omega$, puisque c'est la partie supérieure du filet de l'écrou qui réagit sur la vis; les $fp\,d\omega$ conserveront leurs signes. On n'a donc qu'à changer les signes de Q et de i_0 dans l'équation (8); mais nous ne nous arrêterons pas à cette nouvelle discussion.

58. *De la vrille.* — On désigne sous ce nom un outil formé d'une tige cylindrique terminée par une sorte de vis conique et qui sert à percer des trous dans le bois.

1° *Sur quelques formules relatives aux conoïdes droits.* — Soient

Oz (*fig.* 16 et 17) la directrice rectiligne;
xOy le plan directeur;
$r = mI$, θ, z les coordonnées cylindriques d'un point m de la surface conoïde;

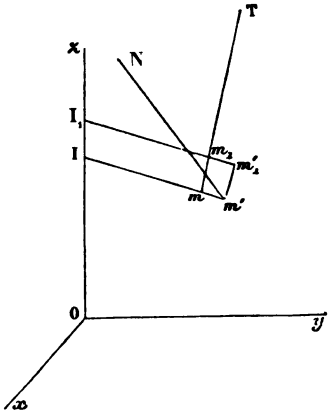
$$(1) \qquad z = f(\theta), \qquad r = F(\theta)$$

les équations de la directrice curviligne, dont la première est celle de la surface;

m_1 un point infiniment voisin de m, situé sur le cylindre de rayon r, défini d'ailleurs par $\theta + d\theta$, $z + dz$;

mT la direction mm_1;

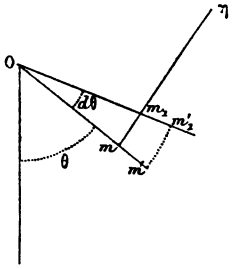
Fig. 16.



mN la normale à la surface en m;

$m\eta$ la perpendiculaire en m à r dans le plan parallèle à xOy, menée dans le sens de l'accroissement de θ;

Fig. 17.



$d\omega$ l'élément de la surface limité par les cylindres de rayons r, $r + dr$, et les plans méridiens définis par θ et $\theta + d\theta$;

$r_0 < r_1$ les rayons suivant Im, fonctions données de θ, des deux courbes tracées sur la surface qui limitent, dans un sens, une portion de son aire.

On a

$$\cos(N, z) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{r^2} f'(\theta)^2}} = \cos(T, \eta),$$

$$\cos(N, -\eta) = -\cos(N, \eta) = \frac{\frac{1}{r} f'(\theta)}{\sqrt{1 + \frac{1}{r^2} f'(\theta)^2}} = \cos(T, z),$$

$$d\omega \cos(N, z) = r\, d\theta\, dr = d\omega \cos(T, \eta),$$

$$d\omega \cos(N, -\eta) = r\, d\theta\, dr \frac{1}{r} f'(\theta) = dr \frac{dz}{d\theta} d\theta = dr\, dz = d\omega \cos(T, z)$$

et enfin

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_{r_0}^{r_1} d\omega \cos(N, z) &= \frac{1}{2}(r_1^2 - r_0^2)\, d\theta, \\ \int_{r_0}^{r_1} d\omega \cos(T, z) &= (r_1 - r_0)\, dz, \\ \int_{r_0}^{r_1} r\, d\omega \cos(N, -\eta) &= \frac{1}{2}(r_1^2 - r_0^2)\, dz, \\ -\int_{r_0}^{r_1} r\, d\omega \cos(T, \eta) &= -\frac{1}{3}(r_1^3 - r_0^3)\, d\theta. \end{aligned} \right.$$

2° Supposons que la directrice curviligne soit une limite de la surface conoïde, qu'elle soit tracée sur un cône dont l'axe est Oz et l'angle de la section méridienne $2\gamma_0$, et qu'elle coupe les génératrices du cône sous l'angle constant i_0.

On a

$$r_0 = z \tang \gamma_0, \qquad Om_0 = \frac{z}{\cos \gamma_0},$$

$$r_0\, d\theta = \frac{dz}{\cos \gamma_0} \tang i_0,$$

d'où

$$(a) \qquad \frac{dz}{z} = \frac{\sin \gamma_0}{\tang i_0} d\theta$$

et

$$(b) \qquad z = \Lambda e^{\lambda\theta},$$

en désignant par A la valeur de z pour $\theta = 0$, et posant

$$(c) \qquad \lambda = \frac{\sin\gamma_0}{\operatorname{tang} i_0}.$$

Supposons qu'on limite d'autre part la surface à un cône dont l'ouverture est $2\gamma_1$. On a

$$r_0 = z \operatorname{tang}\gamma_0, \qquad r_1 = z \operatorname{tang}\gamma_1.$$

En vertu de la formule (a) ou de

$$d\theta = \frac{1}{\lambda z}\, dz,$$

on peut substituer, dans les formules (2), z à la variable θ; et, en désignant par $z' < z''$ les limites de z correspondant à celles θ', θ'' de θ pour une portion déterminée de l'aire du conoïde, il vient

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_{\theta'}^{\theta''} d\theta \int_{r_0}^{r_1} \frac{d\omega}{d\theta} \cos(\mathrm{N}, z) &= \frac{1}{4\lambda}(\operatorname{tang}^2\gamma_1 - \operatorname{tang}^2\gamma_0)(z''^2 - z'^2), \\ \int d\theta \int \frac{d\omega}{d\theta} \cos(\mathrm{T}, z) &= \frac{1}{2}(\operatorname{tang}\gamma_1 - \operatorname{tang}\gamma_0)(z''^2 - z'^2), \\ \int d\theta \int r \frac{d\omega}{d\theta} \cos(\mathrm{N}, -\eta) &= \frac{1}{6}(\operatorname{tang}^2\gamma_1 - \operatorname{tang}^2\gamma_0)(z''^3 - z'^3), \\ -\int d\theta \int r \frac{d\omega}{d\theta} \cos(\mathrm{T}, \eta) &= -\frac{1}{9\lambda}(\operatorname{tang}^3\gamma_1 - \operatorname{tang}^3\gamma_0)(z''^3 - z'^3). \end{aligned} \right.$$

3° *De l'équilibre de la vrille.* — Nous donnerons au filet la forme de la surface ci-dessus.

Soient

Q un effort longitudinal exercé suivant zO sur la vrille;

$\mathfrak{M}$ le moment par rapport à Oz du couple normal à l'axe, agissant sur la tête de l'outil, qui doit s'opposer strictement au glissement;

p la réaction normale de la matière pénétrée, censée répartie uniformément sur la surface du filet;

le coefficient de frottement correspondant.

Il est évident que Q est la somme des deux premières des expressions (3) respectivement multipliées par p et fp; que

$\mathfrak{M}$ est, de même, la somme des deux autres multipliées de la même manière; on obtient ainsi, après avoir supprimé un facteur commun,

$$\frac{\mathfrak{M}}{Q} = \frac{2}{9}\,\frac{3\lambda \operatorname{tang}\gamma_1 + \operatorname{tang}\gamma_0) - 2f(\operatorname{tang}^2\gamma_1 + \operatorname{tang}\gamma_1 \operatorname{tang}\gamma_0 + \operatorname{tang}^2\gamma_0)}{\operatorname{tang}\gamma_1 + \operatorname{tang}\gamma_0 + 2\lambda f}$$
$$\times \left(\frac{z''^2 + z''z' + z'^2}{z'' + z'}\right).$$

Pour que la vrille ne puisse pas s'enfoncer sous la charge Q, sans faire intervenir un effort extérieur rotatif, il faut que $\mathfrak{M} < 0$ ou que

$$(4) \qquad f > \frac{3\lambda}{2}\,\frac{\operatorname{tang}\gamma_1 + \operatorname{tang}\gamma_0}{\operatorname{tang}^2\gamma_1 + \operatorname{tang}\gamma_1 \operatorname{tang}\gamma_0 + \operatorname{tang}^2\gamma_0}.$$

Ces considérations sont applicables au pieu à vis. Le système de pieux qui nous paraît avoir été le mieux étudié est celui qui a été construit en 1865, pour l'Hindoustan, dans les ateliers de M. Gouin. Dans ce type on a

$$\operatorname{tang}\gamma_1 = 0{,}682, \qquad \operatorname{tang}\gamma_0 = 0{,}261$$

et

$$15 = \frac{z''}{z'} = e^{7\pi\lambda};$$

d'où

$$\lambda = 0{,}141.$$

L'inégalité (4) devient par suite

$$f > 0{,}28.$$

Pour le fer sur sable, f doit être supérieur à 0,4; il paraît en être de même pour le fer sur l'argile, car Morin a trouvé $f = 0{,}42$ pour le fer glissant sur le muschelkalk. Cette estimation suffit pour expliquer les excellents résultats auxquels a conduit l'emploi du pieu Mitchell.

D'après la relation (b) on a, pour le type Gouin,

$$i_0 = 60^\circ 49'.$$

CHAPITRE VI.

MOUVEMENT D'UN SOLIDE AUTOUR D'UN POINT FIXE.

§ I. — *Le corps n'est sollicité par aucune force extérieure.*

59. *Préliminaires.* — On sait (Poinsot) que l'ellipsoïde d'inertie du corps, dont Ox, Oy, Oz sont les directions des axes principaux, roule sur un plan fixe (P) perpendiculaire à l'axe du moment des quantités de mouvement.

Il s'agit de déterminer la nature des courbes décrites par le point de contact ou *pôle de rotation m* sur l'ellipsoïde (*polhodie*) et sur le plan fixe (*herpolhodie*), c'est-à-dire d'un problème purement géométrique ou, si l'on veut, débarrassé de toute considération mécanique.

Soient $a > b > c$ les trois demi-axes de l'ellipsoïde d'inertie, dirigés respectivement suivant Ox, Oy, Oz; $\eta < a > c$ la distance OI du point O au plan (P).

En exprimant que le plus grand des moments d'inertie principaux du corps est plus petit que la somme des deux autres, on a successivement

$$\frac{1}{c^2} < \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2},$$

$$c^2 > \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$$

et, par suite,

$$\eta^2 > \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2},$$

$$(\alpha) \qquad \frac{a^2 b^2}{\eta^2} < a^2 + b^2.$$

Les coordonnées du point de contact m satisfont aux équations

$$(A)\qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ \dfrac{x^2}{a^4}+\dfrac{y^2}{b^4}+\dfrac{z^2}{c^4}=\dfrac{1}{\eta^2}. \end{cases}$$

60. *De la polhodie.* — Les ellipsoïdes représentés par les équations (A) se coupent suivant deux courbes symétriques par rapport au centre O, ce qui s'explique en remarquant qu'il y a deux plans tels que (P) situés à la distance η de l'origine. Mais nous ne considérerons que celle de ces courbes qui est réellement décrite par le pôle de rotation.

Si l'on retranche de la première des équations (A) la seconde multipliée par η^2, on trouve la suivante

$$(B)\qquad \frac{x^2}{a^4}(a^2-\eta^2)+\frac{y^2}{b^4}(b^2-\eta^2)+\frac{z^2}{c^2}(c^2-\eta^2)=0,$$

qui représente le cône du second degré qui est décrit dans le corps par l'axe instantané de rotation, cône dont l'une des intersections avec l'ellipsoïde est la polhodie.

Des équations (A) on déduit pour celles des projections de cette courbe sur les trois plans coordonnés

$$(C)\qquad \frac{a^2-b^2}{b^4}y^2+\frac{a^2-c^2}{c^4}z^2=\frac{a^2-\eta^2}{\eta^2},$$

$$(C')\qquad \frac{a^2-b^2}{a^4}x^2-\frac{b^2-c^2}{c^4}z^2=\frac{\eta^2-b^2}{\eta^2},$$

$$(C'')\qquad \frac{a^2-c^2}{a^4}x^2+\frac{b^2-c^2}{b^4}y^2=\frac{\eta^2-c^2}{\eta^2}.$$

Les équations (C), (C″) représentent deux ellipses et l'équation (C′) une hyperbole. Nous avons à examiner les trois cas suivants :

1° $\eta > b$. Les plans parallèles à yOz coupent le cône (B) suivant des ellipses homothétiques. Ce cône, considéré comme droit, est donc elliptique et a Ox pour axe de symétrie.

La polhodie est symétrique par rapport aux plans yOx, zOx dans chacun desquels elle a un couple de sommets.

Le demi petit axe de l'ellipse (C″), dirigé suivant Ox, est

$$\frac{a^2}{\eta}\sqrt{\frac{\eta^2-c^2}{a^2-c^2}}$$

et l'autre demi petit axe

$$\frac{b^2}{\eta}\sqrt{\frac{\eta^2-c^2}{b^2-c^2}};$$

il est facile de s'assurer que le premier est inférieur à a et que l'autre est supérieur à b, de sorte que, comme on devait le prévoir, la projection de la polhodie sur le plan xOy n'est qu'un arc de l'ellipse considérée.

Le demi-axe réel de l'hyperbole (C′) coïncide avec Ox, a pour valeur

$$\frac{a^2}{\eta}\sqrt{\frac{\eta^2-b^2}{a^2-b^2}}$$

et est plus petit que le demi-axe correspondant de l'ellipse (C″).

2° $\eta < B$. On arrive aux mêmes résultats que ci-dessus, à cette différence près que Oz devient l'axe du cône elliptique et l'axe transverse de l'hyperbole.

3° $\eta = b$. Le cône (B) se réduit à deux plans, représentés par

$$\frac{z}{x} = \pm\frac{c^2}{a^2}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}},$$

qui passent par Oy et qui sont symétriques par rapport à yOz. Ces plans établissent la transition entre les cônes ci-dessus, dont les axes sont respectivement Ox et Oz. La polhodie est alors formée de deux moitiés d'ellipses dont l'axe commun déterminé par Oy est $2b$. Les carrés des coordonnées des sommets situés dans le plan zOx s'obtiendront en faisant $y = 0$, $\eta = b$ dans les équations (C) et (C″) et seront

$$x^2 = \frac{a^4}{b^4}\,\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}, \qquad z^2 = \frac{c^4}{b^4}\,\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}.$$

On a, par suite, pour le second demi-axe des ellipses,

$$\sqrt{x^2+z^2} = \sqrt{\frac{b^4(a^4-c^4)-a^2c^2(a^2-c^2)}{b^2(a^2-c^2)}} = \sqrt{a^2+c^2-\frac{a^2c^2}{b^2}}.$$

Si l'ellipsoïde d'inertie est de révolution autour de Oz, on a $a = b$, et les équations (C), (C′), (C″) se réduisent aux deux suivantes :

$$\text{(D)} \qquad z = \frac{c^2}{\eta}\sqrt{\frac{a^2-\eta^2}{a^2-c^2}}, \qquad x^4+y^2 = \frac{a^4}{\eta^2}\,\frac{\eta^2-c^2}{a^2-c^2}.$$

La polhodie est alors une circonférence dont le centre est situé sur l'axe Oz, et dont le plan est normal à cet axe; le cône décrit dans le corps par l'axe instantané est ainsi de révolution autour de l'axe précité.

Proposons-nous maintenant de déterminer les coordonnées du pôle de rotation en fonction de son rayon $r = Om$. L'équation

$$\text{(E)} \qquad x^2+y^2+z^2 = r^2,$$

jointe aux équations (A), donne

$$\text{(F)} \qquad x^2 = P(r^2-\alpha^2), \qquad y^2 = Q(r^2-\beta^2), \qquad z^2 = R(r^2-\gamma^2),$$

en posant

$$\text{(G)} \qquad \left\{\begin{aligned} P &= \frac{a^4}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)} > 0,\\ Q &= \frac{b^4}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)} < 0,\\ R &= \frac{c^4}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)} > 0,\end{aligned}\right.$$

$$\text{(H)} \qquad \left\{\begin{aligned} &\left.\begin{aligned}\alpha^2 &= b^2+c^2-\frac{b^2c^2}{\eta^2} > 0,\\ \beta^2 &= c^2+a^2-\frac{c^2a^2}{\eta^2} > 0,\end{aligned}\right\} && \text{puisque } \eta > c.\\ &\gamma^2 = a^2+b^2-\frac{a^2b^2}{\eta^2} > 0, && \text{en vertu de l'inégalité } (\alpha).\end{aligned}\right.$$

On déduit des formules (H)

$$(\beta) \qquad \left\{\begin{aligned} \alpha^2-\beta^2 &= (b^2-a^2)\left(1-\frac{c^2}{\eta^2}\right) < 0,\\ \beta^2-\gamma^2 &= (c^2-b^2)\left(1-\frac{a^2}{\eta^2}\right) > 0,\\ \gamma^2-\alpha^2 &= (a^2-c^2)\left(1-\frac{b^2}{\eta^2}\right) \gtrless 0 \quad \text{si } \eta \gtrless b.\end{aligned}\right.$$

Ainsi l'on a

$$(\beta') \qquad \begin{cases} \beta > \gamma > \alpha & \text{si } \eta > b, \\ \beta > \alpha > \gamma & \text{si } \eta < b. \end{cases}$$

En se rapportant aux formules (F) et (G), on voit que y^2 ne sera positif qu'autant que $r < \beta$; que x^2, z^2 ne seront positifs que pour des valeurs de r au moins égales à la plus grande des quantités α et γ. On a ainsi

$$\begin{aligned} & r \leqq \beta, \\ & r \geqq \gamma \qquad \text{si } \eta > b, \\ & r \geqq \alpha \qquad \text{si } \eta < b. \end{aligned}$$

On déduit des formules (H) les relations suivantes :

$$(\beta'') \qquad \begin{cases} \eta^2 - \alpha^2 = \dfrac{(\eta^2 - b^2)(\eta^2 - c^2)}{\eta^2} = m \gtrless 0 & \text{si } \eta \gtrless b, \\ \eta^2 - \beta^2 = \dfrac{(\eta^2 - c^2)(\eta^2 - a^2)}{\eta^2} = n < 0, & \\ \eta^2 - \gamma^2 = \dfrac{(\eta^2 - a^2)(\eta^2 - b^2)}{\eta^2} = p \lessgtr 0 & \text{si } \eta \gtrless b. \end{cases}$$

En posant

$$(\beta''') \qquad \Delta = (\eta^2 - a^2)(\eta^2 - b^2)(\eta^2 - c^2),$$

on a

$$(\beta^{\text{IV}}) \quad \sqrt{mnp} = \sqrt{(\eta^2 - \alpha^2)(\eta^2 - \beta^2)(\eta^2 - \gamma^2)} = \mp \frac{\Delta}{\eta^3} \qquad \text{si } \eta \gtrless b.$$

La valeur de la fonction

$$(\text{I}) \qquad T = (r^2 - \alpha^2)(r^2 - \beta^2)(r^2 - \gamma^2)$$

sera, d'après ce qui précède, constamment négative pour les valeurs admissibles de r.

En comparant entre elles la somme des équations (F) à l'équation (E), on obtient les relations suivantes :

$$(\gamma) \qquad \begin{cases} P + Q + R = 1, \\ P\alpha^2 + Q\beta^2 + R\gamma^2 = 0, \end{cases}$$

d'où

$$(\delta) \qquad P(\gamma^2 - \alpha^2) + Q(\gamma^2 - \beta^2) = \gamma^2.$$

Nous désignerons par ds l'arc élémentaire de la polhodie. On déduit des équations (F)

$$dx^2 = \frac{P^2 r^2 dr^2}{x^2} = \frac{P r^2 dr^2}{r^2 - \alpha^2}, \qquad dy^2 = \frac{Q r^2 dr^2}{r^2 - \beta^2}, \qquad dz^2 = \frac{R r^2 dr^2}{r^2 - \gamma^2};$$

d'où

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = r^2 dr^2 \left(\frac{P}{r^2 - \alpha^2} + \frac{Q}{r^2 - \beta^2} + \frac{R}{r^2 - \gamma^2} \right.$$

et, en ayant égard à la première des relations (γ),

$$(J) \quad ds^2 = \frac{r^2 dr^2}{T} \left\{ \begin{array}{l} r^4 - r^2 [P(\beta^2 + \gamma^2) + Q(\gamma^2 + \alpha^2) + R(\alpha^2 + \beta^2) \\ \qquad\qquad + P\beta^2\gamma^2 + Q\gamma^2\alpha^2 + R\alpha^2\beta^2] \end{array} \right\}.$$

En raison de la forme de la fonction T, on est conduit à chercher à exprimer les coefficients qui entrent dans l'expression de ds^2 au moyen de η et des constantes α, β, γ substituées à a, b, c.

Si, dans l'expression

$$B = P(\beta^2 + \gamma^2) + Q(\gamma^2 + \alpha^2) + R(\alpha^2 + \beta^2),$$

on remplace R par sa valeur déduite de la première des formules (γ) et que l'on ait ensuite égard à la relation (δ), on trouve

$$(\varepsilon) \qquad B = P(\gamma^2 - \alpha^2) + Q(\gamma^2 - \beta^2) + \alpha^2 + \beta^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2.$$

En substituant, dans l'expression

$$C = P\beta^2\gamma^2 + Q\gamma^2\alpha^2 + R\alpha^2\beta^2,$$

la valeur de R déduite de la première des formules (γ), et ensuite celle de P tirée de (δ), on obtient pour résultat

$$(\zeta) \qquad \left\{ \begin{array}{l} C = P\beta^2(\gamma^2 - \alpha^2) + Q\alpha^2(\gamma^2 - \beta^2) + \alpha^2\beta^2 \\ \quad = Q(\beta^2 - \alpha^2)(\beta^2 - \gamma^2) + \alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2. \end{array} \right.$$

Cherchons à faire disparaître a^2 et c^2 dans l'expression

$$Q = \frac{b^4}{(a^2 - b^2)(c^2 - b^2)}.$$

De la troisième des équations (H) on tire

$$(\eta) \qquad a^2 = \frac{\eta^2(\gamma^2 - b^2)}{\eta^2 - b^2};$$

d'où

$$a^2 - b^2 = \frac{b^4 - 2b^2\eta^2 + \eta^2\gamma^2}{\eta^2 - b^2};$$

on a, de même,

$$c^2 - b^2 = \frac{b^4 - 2b^2\eta^2 + \eta^2\alpha^2}{\eta^2 - b^2}.$$

Il vient ainsi

$$Q = \frac{b^4(\eta^2 - b^2)^2}{(b^4 - 2b^2\eta^2 + \eta^2\alpha^2)(b^4 - 2b^2\eta^2 + \eta^2\gamma^2)}.$$

En éliminant c^2 entre les deux premières des équations (H), on trouve

$$b^2(\eta^2 - \beta^2) = a^2(\eta^2 - \alpha^2) + (\alpha^2 - \beta^2)\eta^2;$$

d'où, en ayant égard à la valeur (η),

$$(\mathrm{K}) \quad \left\{ \begin{aligned} b^4 - 2\eta^2 b^2 &= \frac{\eta^2}{\eta^2 - \beta^2}[\beta^2\eta^2 - (\alpha^2 + \gamma^2)\eta^2 + \alpha^2\gamma^2] \\ &= \eta^2\left[-\eta^2 + \frac{\eta^4 - (\alpha^2 + \gamma^2)\eta^2 + \alpha^2\gamma^2}{\eta^2 - \beta^2}\right] \\ &= \eta^2\left[-\eta^2 + \frac{(\eta^2 - \alpha^2)(\eta^2 - \gamma^2)}{\eta^2 - \beta^2}\right]. \end{aligned} \right.$$

En portant cette valeur dans l'expression ci-dessus de Q, on trouve

$$(\theta) \qquad Q(\beta^2 - \alpha^2)(\beta^2 - \gamma^2) = \frac{b^4(\eta^2 - b^2)^2(\eta^2 - \beta^2)^2}{\eta^4(\eta^2 - \alpha^2)(\eta^2 - \gamma^2)}.$$

L'équation (K) donne

$$(\mathrm{L}) \qquad b^2 = \eta^2 \mp \eta\sqrt{\frac{(\eta^2 - \alpha^2)(\eta^2 - \gamma^2)}{\eta^2 - \beta^2}},$$

en prenant le signe — ou le signe +, selon que $\eta \gtrless b$.

Dans le calcul suivant, il ne faudra pas perdre de vue que $\eta^2 - \beta^2$ est négatif.

En remplaçant $\eta^2 - b^2$ par sa valeur déduite de (L), la formule (θ) devient

$$Q(\beta^2 - \alpha^2)(\beta^2 - \gamma^2) = \frac{b^4}{\eta^2}(\eta^2 - \beta^2),$$

et enfin, en remplaçant b^4 par sa valeur fournie par (L) et

ayant égard à (β^{IV}),

$$\begin{aligned}
&Q(\beta^2-\alpha^2)(\beta^2-\gamma^2)\\
&\quad=(\eta^2-\beta^2)\left[\eta^2\mp 2\eta\sqrt{\frac{(\eta^2-\alpha^2)(\eta^2-\gamma^2)}{\eta^2-\beta^2}}\right]+(\eta^2-\alpha^2)(\eta^2-\gamma^2)\\
&\quad=(\eta^2-\beta^2)\eta^2\pm 2\eta\sqrt{(\eta^2-\alpha^2)(\eta^2-\beta^2)(\eta^2-\gamma^2)}+(\eta^2-\alpha^2)(\eta^2-\gamma^2)\\
&\quad=2\eta^4-\eta^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-\frac{2\Delta}{\eta^2}.
\end{aligned}$$

La formule (ζ) devient alors

$$C=\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2-\eta^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+2\eta^4-\frac{2\Delta}{\eta^2}.$$

En ayant égard à cette valeur et à la valeur (ε), la formule (J) prend la forme définitive

$$(1)\quad\left\{\begin{aligned}
ds^2=\frac{r^2dr^2}{T}\Big[&r^4-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)r^2-\eta^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\\
&+2\eta^4-\frac{2\Delta}{\eta^2}+\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2\Big].
\end{aligned}\right.$$

61. *Équation différentielle de l'herpolhodie.* — Nous rapporterons la courbe à l'origine polaire I, pied de la perpendiculaire abaissée du point O sur le plan directeur (P).

Soient $\rho=\mathrm{I}m$ le rayon vecteur du point m et φ l'angle qu'il forme avec une droite fixe $\mathrm{I}\chi$ partant de I tracée dans le plan (P). On a

$$(\mathrm{P})\qquad \rho^2=r^2-\eta^2.$$

Avant d'aller plus loin, nous rappellerons que, lorsque l'ellipsoïde d'inertie est de révolution ou que $a=b$, on a trouvé que la polhodie est un cercle dont Oz est l'axe. Le rayon r étant constant et égal à β, il en est de même de ρ; par suite, l'herpolhodie est aussi un cercle. D'où il suit que le mouvement du corps est défini par le roulement d'un cône de révolution sur un cône fixe également de révolution.

Revenons aux généralités. Le rayon vecteur ρ atteint, en même temps que r, ses maxima et minima; d'où il suit que l'herpolhodie est comprise entre deux circonférences aux-

quelles elle est tangente, dont l'extérieure a pour rayon $\sqrt{\beta^2 - \eta^2}$ et l'autre

$$\sqrt{\gamma^2 - \eta^2} \qquad \text{si } \eta > b,$$
$$\sqrt{\alpha^2 - \eta^2} \qquad \text{si } \eta < b.$$

Il résulte du roulement de la polhodie sur l'herpolhodie que les éléments correspondants de ces courbes sont égaux et que l'on a

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2,$$

ou, en vertu de la formule (P),

$$ds^2 = \frac{r^2 dr^2}{r^2 - \eta^2} + \rho^2 d\varphi^2,$$

ou encore, en se reportant à la valeur (1) et ayant égard à la valeur (I),

$$\rho^2 d\varphi^2 = -\frac{r^2 dr^2}{(r^2 - \eta^2)\mathrm{T}}\left[\eta^2 r^4 - 2\left(\eta^3 - \frac{\Delta}{\eta^3}\right)\eta r^2 + (\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2)\eta^2 \right.$$
$$\left. - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\eta^4 + 2\eta^6 - 2\Delta - \alpha^2\beta^2\gamma^2\right].$$

Mais, si dans l'expression

$$\left(\eta^3 - \frac{\Delta}{\eta^3}\right)^2 = \eta^6 - 2\Delta + \frac{\Delta^2}{\eta^6},$$

on remplace $\frac{\Delta^2}{\eta^6}$ par sa valeur fournie par (β^{IV}), on trouve la somme des termes indépendants de r du second facteur de l'expression précédente.

On a donc

$$\rho^2 d\varphi^2 = -\frac{r^2 dr^2}{(r^2 - \eta^2)\mathrm{T}}\left[\eta r^2 - \eta\left(\eta^3 - \frac{\Delta}{\eta^3}\right)\right]^2,$$

ou encore

$$(2) \qquad d\varphi = \frac{d\rho}{\pm\rho\sqrt{-\mathrm{T}}}\left(\eta\rho^2 + \frac{\Delta}{\eta^3}\right).$$

On devra, dans chaque cas, choisir celui des deux signes qui rend $d\varphi$ positif.

Arrêtons-nous un instant au cas singulier de $b = \eta$, dans

lequel on a $\alpha = \gamma = n$, $\Delta = 0$, et

$$T = (r^2 - \eta^2)^2 (r^2 - \beta^2) = \rho^4 (\rho^2 - \rho_0^2),$$

en posant

$$\rho_0 = \sqrt{\beta^2 - \eta^2}.$$

L'équation (2) devient

$$d\varphi = \eta \frac{d\rho}{\pm \rho \sqrt{\rho_0^2 - \rho^2}}.$$

En posant $\rho = \rho_0 \sin u$ et désignant par G une constante, on trouve

$$\operatorname{tang} \frac{u}{2} = G e^{\frac{\rho_0}{\eta}\varphi}.$$

Mais, si l'on fait coïncider $I\chi$ avec la direction de ρ_0, on a $u = \frac{\pi}{2}$ pour $\varphi = 0$; par suite, $G = 1$, et alors

$$\rho = \frac{2\rho_0}{e^{\frac{\rho_0}{\eta}\varphi} + e^{-\frac{\rho_0}{\eta}\varphi}},$$

équation qui représente une courbe symétrique par rapport à $I\chi$, qui est formée de deux spirales dont I est un point asymptotique commun. Selon sa position initiale, le pôle m passera ou non par le point maximum de la courbe; quoi qu'il en soit, il ne décrira réellement qu'une seule des spirales pour arriver au point I, mais au bout d'un temps infini, comme on le démontre par d'autres considérations que les précédentes (¹).

Revenons aux généralités. Nous conviendrons de faire passer l'axe $I\chi$ par un point minimum; $d\rho$ sera positif entre ce point et le point maximum suivant, étendue qu'il nous suffira de considérer. Nous avons deux cas à étudier.

1° $\eta > b$. Ici Δ est négatif; mais, en exprimant que le minimum $\eta(\gamma^2 - \eta^2)$ de $\eta\rho^2$ est supérieur à $-\frac{\Delta}{\eta^3}$ ou que

$$\eta^2(\gamma^2 - \eta^2)^2 > (\eta^2 - \alpha^2)(\eta^2 - \beta^2)(\eta^2 - \gamma^2),$$

ou encore

$$\eta^2(\gamma^2 - \alpha^2) > \beta^2(\eta^2 - \alpha^2)$$

(¹) Tome I, n° 109.

ou enfin, en vertu des valeurs (β), (β''), (H),

$$(\eta^2 - a^2)\left(\eta^2 - \frac{c^2}{2}\right) < 0,$$

ce qui a lieu. Il faudra donc prendre le signe supérieur du dénominateur de l'expression (2).

2° $\eta < b$. Comme $\Delta > 0$, il faut également prendre le signe supérieur du dénominateur.

On aura donc sans restriction

$$(3) \qquad d\varphi = \frac{d\rho}{\rho\sqrt{-T}}\left(\eta\rho^2 + \frac{\Delta}{\eta^3}\right).$$

62. *Rayon de courbure de l'herpolhodie.* — Soient U l'angle formé par la tangente avec le rayon vecteur; R le rayon de courbure; nous avons

$$(4) \qquad T = (\rho^2 + m)(\rho^2 + n)(\rho^2 + p),$$

$$(5) \qquad \operatorname{tang} U = \frac{\rho\, d\varphi}{d\rho} = \frac{1}{\sqrt{-T}}\left(\eta\rho^2 + \frac{\Delta}{\eta^3}\right),$$

et, en observant que $ds = \dfrac{d\rho}{\cos U}$,

$$\frac{1}{R\cos U} = \frac{d\varphi + dU}{d\rho} = \frac{1}{\rho}\operatorname{tang} U + \cos^2 U\,\frac{d\operatorname{tang} U}{d\rho},$$

ou

$$\frac{1}{R\cos^3 U} = \frac{1}{\rho}\operatorname{tang} U\,(1 + \operatorname{tang}^2 U) + \frac{d\operatorname{tang} U}{d\rho}.$$

Si l'on remarque que

$$\frac{d(-T)^{-\frac{1}{2}}}{d\rho} = \frac{1}{2}(-T)^{-\frac{3}{2}}\frac{dT}{d\rho}$$
$$= \rho(-T)^{\frac{3}{2}}[(\rho^2+m)(\rho^2+n)+(\rho^2+n)(\rho^2+p)+(\rho^2+p)(\rho^2+m)],$$

l'équation (5) donne

$$\frac{d\operatorname{tang} U}{d\rho} = \frac{\rho}{(-T)^{\frac{3}{2}}}\left\{-2\eta T + \left(\eta\rho^2 + \frac{\Delta}{\eta^2}\right)\left[\begin{array}{c}(\rho^2+m)(\rho^2+n)\\ +(\rho^2+n)(\rho^2+p)\\ +(\rho^2+p)(\rho^2+m)\end{array}\right]\right\},$$

et l'on a, par suite,

$$\begin{aligned}\frac{\rho(-\mathrm{T})^{\frac{3}{2}}}{\mathrm{R}\cos^3\mathrm{U}} &= -\mathrm{T}\left(\eta\rho^2+\frac{\Delta}{\eta^3}\right)+\left(\eta\rho^2+\frac{\Delta}{\eta^3}\right)^3\\ &\quad+\rho^2\left\{-2\eta\mathrm{T}+\left(\eta\rho^2+\frac{\Delta}{\eta^3}\right)\begin{bmatrix}(\rho^2+m)(\rho^2+n)\\+(\rho^2+n)(\rho^2+p)\\+(\rho^2+p)(\rho^2+m)\end{bmatrix}\right\}\\ &= \left(\eta\rho^2+\frac{\Delta}{\eta^3}\right)\left\{\begin{matrix}-(\rho^2+m)(\rho^2+n)(\rho^2+p)\\+\rho^2\begin{bmatrix}(\rho^2+m)(\rho^2+n)\\+(\rho^2+n)(\rho^2+p)\\+(\rho^2+p)(\rho^2+m)\end{bmatrix}+\left(\eta\rho^2+\frac{\Delta}{\eta^3}\right)^2\end{matrix}\right\}\\ &\quad-2\eta\rho^2\mathrm{T};\end{aligned}$$

d'où, en développant et ayant égard à la formule (β^{iv}) qui donne mnp, puis divisant par ρ^4,

$$\begin{aligned}\frac{(-\mathrm{T})^{\frac{3}{2}}}{\rho^2\mathrm{R}\cos^3\mathrm{U}} &= -\eta\rho^2\left(m+n+p-\eta^2-\frac{2\Delta}{\eta^4}\right)\\ &\quad+\frac{\Delta}{\eta}\left(3+\frac{m+n+p}{\eta^2}\right)-2\eta(mn+np+pm);\end{aligned}$$

mais on a

$$m+n+p=3\eta^2-2(a^2+b^2+c^2)+\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{\eta^2},$$

$$mn+np+pm=\frac{\Delta}{\eta^4}(3\eta^2-a^2-b^2-c^2),$$

par suite,

$$(6)\quad\left\{\begin{aligned}\frac{\eta^5}{\rho^3}\frac{(-\mathrm{T})^{\frac{3}{2}}}{\mathrm{R}\cos^3\mathrm{U}} &= \eta^2\rho^2[-2a^2b^2c^2+\eta^2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)]\\ &\quad+\Delta(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\\ &= -\eta^2\rho^2[a^2b^2(c^2-\eta^2)+c^2a^2(b^2-\eta^2)-b^2c^2\eta^2]\\ &\quad+\Delta(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2).\end{aligned}\right.$$

L'expression

$$\frac{(-\mathrm{T})^{-\frac{3}{2}}}{\cos^3\mathrm{U}}=\left[-\mathrm{T}+\left(\eta\rho^2+\frac{\Delta}{\eta^3}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}$$

ne peut pas s'annuler, puisqu'on a vu plus haut que l'expression $\eta\rho^2+\frac{\Delta}{\eta^3}$ reste positive, quelle que soit la valeur admissible

de ρ, et que T est négatif; donc R ne peut être nul et, par suite, la courbe n'a pas de points de rebroussement. La même expression ne pouvant pas devenir infinie, les points d'inflexion, s'il en existe, seront obtenus en égalant à zéro le second membre de l'équation (6). Nous avons, à ce sujet, deux cas à distinguer :

1° $\eta > b$. Le coefficient de $-\eta^2\rho^2$, dans l'équation (6), et Δ étant négatifs, il y a une valeur positive de ρ^2 qui annule le second membre de cette équation, et cette valeur est

$$(7) \qquad \rho^2 = \frac{(a^2-\eta^2)(\eta^2-b^2)(\eta^2-c^2)(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}{\eta^2[a^2b^2(\eta^2-c^2)+c^2a^2(\eta^2-b^2)+b^2c^2\eta^2]}.$$

Mais, en exprimant que cette valeur est inférieure à son minimum

$$\gamma^2-\eta^2 = \frac{(a^2-\eta^2)(\eta^2-b^2)}{\eta^2},$$

on trouve

$$c^2 > \frac{a^2b^2}{a^2+b^2},$$

ce qui est la condition que doit remplir l'ellipsoïde d'inertie.

Donc la valeur ci-dessus de ρ^2 n'est pas admissible et l'herpolhodie n'a pas de points d'inflexion.

2° $\eta < b$. Si

$$\eta^2 \geqq \frac{2a^2b^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2},$$

il n'y a pas non plus de points d'inflexion, puisque $\Delta > 0$ et que le coefficient de $-\eta^2\rho^2$ dans l'équation (6) est négatif ou nul.

Supposons maintenant que

$$\eta^2 < \frac{2a^2b^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2};$$

la valeur (7), mise sous la forme

$$\rho^2 = \frac{(a^2-\eta^2)(b^2-\eta^2)(\eta^2-c^2)(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}{\eta^2[2a^2b^2c^2-\eta^2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)]},$$

ne peut pas être supérieure au minimum de ρ^2, c'est-à-dire à

$$\alpha^2-\eta^2 = \frac{(b^2-\eta^2)(\eta^2-c^2)}{\eta^2};$$

car, s'il en était autrement, on trouverait

$$-c^2b^2 > a^2(b^2 - c^2).$$

Donc, en résumé, l'herpolhodie n'a ni points de rebroussement ni points d'inflexion. Ce n'est donc point une ligne sinueuse, comme l'indique le nom qui lui a été donné par Poinsot.

63. *Mode de génération de l'herpolhodie* [1]. — Soient

Ox, Oy, Oz les trois axes d'inertie principaux du corps;
$A > B > C$ les moments d'inertie correspondants;
n, p, q les composantes suivant Ox, Oy, Oz de la rotation instantanée ω;
h, k les constantes qui représentent la force vive et le moment des quantités de mouvement;
OX, OY, OZ trois axes rectangulaires fixes, dont le dernier est l'axe du moment des quantités de mouvement;
OA la trace du plan mobile xOy sur le plan XOY, faisant avec OX, Ox les angles φ et ψ;
$\theta = \widehat{ZOz}$;
OB, OC les perpendiculaires à OA dans les plans xOy, XOY.

On a les équations connues [2]

$$(1)\qquad \begin{cases} An^2 + Bp^2 + Cq^2 = h, \\ A^2n^2 + B^2p^2 + C^2q^2 = k^2, \end{cases}$$

$$(2)\qquad B\frac{dp}{dt} + (A - C)nq = 0$$

et les inégalités

$$(3)\qquad Ah - k^2 > 0, \qquad Ch - k^2 < 0.$$

La quantité $k^2 - Bh$ peut être positive, nulle ou négative.

Si l'on pose

$$(4)\qquad p_0^2 = \frac{Ah - k^2}{B(A - B)}, \qquad p_1^2 = \frac{k^2 - Ch}{B(B - C)},$$

---

(1) Dû à M. Pinczon lorsque, en 1887, il était élève de l'École Polytechnique.

(2) Voir le Tome I, n° 107.

les équations (1) donnent

$$(5)\qquad \begin{cases} n^2 = \dfrac{B(B-C)}{A(A-C)}(p_1^2 - p^2), \\ q^2 = \dfrac{B(A-B)}{C(A-C)}(p_0^2 - p^2), \end{cases}$$

et l'équation (2)

$$(6)\qquad dt = \pm\sqrt{\frac{AC}{(A-B)(B-C)}}\,\frac{dp}{\sqrt{(p_0^2-p^2)(p_1^2-p^2)}};$$

on voit ainsi que p^2 est compris entre p_0^2 et p_1^2.

Nous avons aussi les relations connues :

$$(7)\qquad \begin{cases} An = -k\sin\theta\sin\psi, \\ Bp = k\sin\theta\cos\psi, \\ \cos\theta = \dfrac{Cq}{k}, \\ \dfrac{d\varphi}{dt} = k\dfrac{A^2n^2 + Bp^2}{A^2n^2 + B^2p^2} > 0. \end{cases}$$

La rotation instantanée ω donne les composantes

$$\begin{array}{ll} n\cos\psi + p\sin\psi & \text{suivant OA,} \\ -n\sin\psi + p\cos\psi & \text{» OB.} \end{array}$$

La considération de cette dernière conduit immédiatement à la composante

$$(-n\sin\psi + p\cos\psi)\cos\theta - q\sin\theta \qquad \text{suivant OC.}$$

Si l'on désigne par σ l'angle formé avec OA, par la projection de ω sur XOY, on a, par ce qui précède,

$$\operatorname{tang}\sigma = \frac{(-n\sin\psi + p\cos\psi)\cos\theta - q\sin\theta}{n\cos\psi + p\sin\psi}.$$

En multipliant les deux termes de la fraction par $\sin\theta$ et ayant égard aux deux premières des équations (7), on trouve

$$\operatorname{tang}\sigma = \frac{(An^2 + Bp^2)\cos\theta - kq(1-\cos^2\theta)}{np(B-A)}$$

ou, en remplaçant $\cos\theta$ par sa valeur (7),

$$\operatorname{tang}\sigma = \frac{k^2 - Ch}{k(A-B)}\,\frac{q}{np}.$$

Si maintenant on substitue à n, q leurs valeurs (5), on obtient

$$(8)\qquad \operatorname{tang}\sigma = \frac{k^2 - Ch}{kp}\sqrt{\frac{A}{C(A-B)(B-C)}\,\frac{p^2-p_0^2}{p^2-p_1^2}}.$$

Soient maintenant

r le rayon de l'ellipsoïde d'inertie déterminé par la direction de la rotation instantanée ω;

η la hauteur au-dessus du plan XOY du plan sur lequel roule cet ellipsoïde;

ρ la projection de r sur XOY ou le rayon vecteur de l'herpolhodie.

On a

$$(9)\qquad \begin{cases} r = \dfrac{\omega}{\sqrt{h}}, \\[2ex] \eta = \dfrac{\sqrt{h}}{k} \end{cases} \qquad \text{(Poinsot.)}$$

et

$$(10)\qquad \rho^2 = r^2 - \eta^2 = \frac{k^2\omega^2 - h^2}{hk^2} = \frac{k^2(n^2+p^2+q^2) - h^2}{hk^2}.$$

En retranchant la seconde des équations (1) de la première, multipliée par $A + C$, on trouve

$$n^2 + q^2 = \frac{h(A+C) - k^2 - B(A+C-B)p^2}{AC},$$

et, en substituant cette valeur dans la formule (10), on obtient

$$(11)\qquad \rho^2 = \frac{(A-B)(B-C)}{ACh}(p_2^2 - p^2),$$

en posant

$$(12)\qquad p_0^2 = \frac{(k^2 - Ch)(Ah - k^2)}{k^2(A-B)(B-C)}.$$

On remarquera que

$$(13)\qquad \begin{cases} p_0^2 - p_1^2 = -\dfrac{A-C}{B(A-B)(B-C)}(k^2 - Bh), \\[2ex] p_0^2 - p_2^2 = -\dfrac{C(Ah-k^2)(k^2-Bh)}{k^2B(A-B)(B-C)}, \\[2ex] p_1^2 - p_2^2 = \dfrac{A(k^2-Ch)(k^2-Bh)}{k^2B(A-B)(B-C)}. \end{cases}$$

En éliminant p^2 entre les équations (8) et (11), on obtiendrait l'équation polaire de la polhodie rapportée à l'axe OA; mais il est plus commode de conserver la variable auxiliaire p pour la discussion dans laquelle on a à considérer les trois cas suivants :

1° $k^2 - Bh > 0$. Les équations (13) montrent que

$$p_1^2 > p_0^2, \qquad p_2^2 \begin{matrix} > p_0^2 \\ < p_1^2 \end{matrix};$$

par suite, $p^2 \leqq p_0^2$ et p oscillera entre $-p_0$ et p_0 :

Pour $p = 0$, on a $\sigma = 90°$, et ρ est maximum.
» $p = p_0$, » $\sigma = 0$, » ρ est minimum.

Il suit de là que la courbe rapportée à OA est un ovale symétrique par rapport à OA et que la polhodie est cet ovale tournant autour de l'origine O toujours dans le même sens, avec la vitesse angulaire $\frac{d\varphi}{dt}$.

2° $k^2 - Bh = 0$. Alors

$$k = \sqrt{B}h, \qquad p_0^2 = p_1^2 = p_2^2 = \frac{h}{B},$$

$$\operatorname{tang}\sigma = \frac{1}{p}\sqrt{\frac{A(B-C)h}{BC(A-B)}},$$

$$\rho^2 = \frac{(A-B)(B-C)(h-Bp^2)}{ABCh}.$$

Pour $p = 0$, on a $\sigma = 90°$, et ρ est maximum.

» $p^2 = \frac{h}{B}$, on a $\operatorname{tang}\sigma = \sqrt{\frac{A(B-C)}{C(A-B)}}$ } qui donne le maximum de σ, et ρ est nul.

Il résulte de là que la courbe rapportée OA est à peu près semblable à la lemniscate.

3° $k^2 - Bh < 0$. Les équations montrent que

$$p_1^2 < p_0^2, \quad p_2^2 \begin{matrix} < p_0^2 \\ > p_1^2 \end{matrix},$$

et p oscillera entre $-p_1$ et p_1 :

Pour $p = 0$, $\sigma = 90°$, et ρ est maximum;
» $p = p_1$, $\sigma = 90°$, et ρ est minimum.

Il suit de là que la courbe se compose de deux ovales symétriquement situés par rapport à OA et ayant OC pour axe de symétrie.

64. *Théorème de Chasles.* — En conservant les notations du numéro qui précède, désignons par α^2 une constante et considérons l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = \alpha^2.$$

Si x, y, z sont les coordonnées de l'intersection m de l'axe du moment k des quantités de mouvement avec l'ellipsoïde et r le rayon Om, on a

$$x = r\frac{An}{k}, \qquad y = r\frac{Bp}{k}, \qquad z = r\frac{Cq}{k};$$

en substituant les valeurs dans l'équation ci-dessus et en se rappelant que $An^2 + Bp^2 + Cq^2 = h$, on trouve

$$r = \frac{\alpha k}{\sqrt{h}}.$$

Donc le point m décrit l'intersection de l'ellipsoïde mobile avec une sphère. En supposant $\alpha = \sqrt{2}$, l'ellipsoïde est celui de MacCullagh.

§ II. — *Du mouvement d'une toupie sur un plan mobile.*

65. Soient

OX′, OY′, OZ′ trois axes rectangulaires fixes, dont le troisième est censé dirigé en sens inverse de la pesanteur;

X'_1, Y'_1, Z'_1 les coordonnées, par rapport à ces axes, du centre de gravité G de la toupie dont la masse est M;

$$(1) \qquad X'\cos\lambda + Y'\cos\mu + Z'\cos\mu = \zeta$$

l'équation du plan mobile dans laquelle λ, μ, ν, ζ sont des fonctions données du temps;

N la réaction normale de ce plan sur la pointe K de la toupie;

GX, GY, GZ les axes parallèles à OX′, OY′, OZ′ menés par le centre de gravité G;

$l = \mathrm{GK}$;

Gz l'axe de révolution de la toupie pour lequel le moment d'inertie est C;

Gx, Gy deux des autres axes d'inertie principaux rectangulaires dont la position est déterminée dans le corps et pour lesquels le moment d'inertie est A;

n, p, q les composantes de la rotation instantanée autour de G, suivant Gx, Gy, Gz;

GA l'intersection des plans xGy, XGY;

GB, GC ses perpendiculaires dans ces plans, comprises évidemment dans le plan ZGz;

$\varphi = \widehat{\mathrm{AGX}}$, $\psi = \widehat{x\mathrm{GA}}$, $\theta = \widehat{z\mathrm{GZ}}$.

Nous avons d'abord

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{M}\frac{d^2\mathrm{X}'_1}{dt^2} &= \mathrm{N}\cos\lambda,\\ \mathrm{M}\frac{d^2\mathrm{Y}'_1}{dt^2} &= \mathrm{N}\cos\mu,\\ \mathrm{M}\frac{d^2\mathrm{Z}'_1}{dt^2} &= \mathrm{N}\cos\nu - \mathrm{M}g. \end{aligned}\right.$$

Il faut maintenant exprimer que la pointe K reste sur le plan représenté par l'équation (1) et, en premier lieu, déterminer les coordonnées X, Y, Z de ce point en fonction de φ, ψ, θ.

En remarquant que les projections de KG sur GZ et GC sont respectivement

$$(a)\qquad \begin{aligned} \mathrm{Z} &= -l\cos\theta,\\ &\ \ l\sin\theta, \end{aligned}$$

nous aurons

$$(a')\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{X} &= -l\sin\theta\sin\varphi,\\ \mathrm{Y} &= l\sin\theta\cos\varphi. \end{aligned}\right.$$

Nous avons donc, pour les coordonnées du point K suivant OX′, OY′, OZ′,

$$\begin{aligned} \mathrm{X}' &= -l\sin\theta\sin\varphi + \mathrm{X}'_1,\\ \mathrm{Y}' &= l\sin\theta\cos\varphi + \mathrm{Y}'_1,\\ \mathrm{Z}' &= -l\cos\theta + \mathrm{Z}'_1, \end{aligned}$$

et, en substituant ces valeurs dans l'équation (1), on trouve

$$(3)\quad \begin{cases} X'_1 \cos\lambda + Y'_1 \cos\mu + Z'_1 \cos\nu \\ \quad + l(-\sin\theta \sin\varphi \cos\lambda + \sin\theta \cos\varphi \cos\mu - \cos\theta \cos\nu) = \zeta. \end{cases}$$

Si l'on élimine N entre les équations (2), on obtiendra deux équations qui, jointes à (3), permettront de déterminer X', Y', Z' au moyen de λ, μ, ν, ζ et des fonctions inconnues du temps φ, ψ, θ.

En désignant par N_x, N_y, N_z les composantes de N suivant Gx, Gy, Gz, nous avons, pour les équations du mouvement de la toupie autour de son centre de gravité,

$$(4)\quad \begin{cases} A\dfrac{dn}{dt} + (C - A)pq = lN_y, \\ B\dfrac{dp}{dt} + (A - C)nq = -lN_x, \\ C\dfrac{dq}{dt} = 0, \qquad \text{c'est-à-dire que } q \text{ est constant.} \end{cases}$$

Des deux premières des relations connues [1]

$$(5)\quad \begin{cases} n = \dfrac{d\theta}{dt}\cos\psi - \dfrac{d\varphi}{dt}\sin\theta \sin\psi, \\ p = \dfrac{d\theta}{dt}\sin\psi + \dfrac{d\varphi}{dt}\sin\theta \cos\psi, \\ q = -\dfrac{d\psi}{dt} + \dfrac{d\varphi}{dt}\cos\theta, \end{cases}$$

on déduit

$$(6)\quad \begin{cases} \sin\theta \dfrac{d\varphi}{dt} = p\cos\psi - n\sin\psi, \\ \dfrac{d\theta}{dt} = p\sin\psi + n\cos\psi. \end{cases}$$

Il s'agit maintenant de déterminer N_x, N_y, N_z en fonction de φ, θ, ψ, λ, μ, ν. Les composantes $N\cos\lambda$, $N\cos\mu$ donnent les suivantes :

$$\begin{array}{ll} N(\ \ \cos\lambda \cos\varphi + \cos\mu \sin\varphi) & \text{suivant GA,} \\ N(-\cos\lambda \sin\varphi + \cos\mu \cos\varphi) & \quad\text{»}\quad \text{GC,} \end{array}$$

---

[1] Tome I, page 35.

d'où

$$\begin{array}{ll} N(-\cos\lambda\sin\varphi+\cos\mu\cos\varphi)\cos\theta & \text{suivant GB,} \\ -N(-\cos\lambda\sin\varphi+\cos\mu\cos\varphi)\sin\theta & \quad\text{»}\quad Gz, \end{array}$$

La composante $N\cos\nu$ donne aussi

$$\begin{array}{ll} N\cos\nu\sin\theta & \text{suivant GB,} \\ N\cos\nu\cos\theta & \quad\text{»}\quad Gz. \end{array}$$

Si donc nous posons

$$(7)\qquad \begin{cases} P=(\cos\lambda\sin\varphi-\cos\mu\cos\varphi)\cos\theta-\cos\nu\sin\theta, \\ Q=\cos\lambda\cos\varphi+\cos\mu\sin\varphi, \end{cases}$$

nous aurons, pour les composantes de N,

$$\begin{array}{ll} NQ & \text{suivant GA,} \\ -NP & \quad\text{»}\quad GB; \end{array}$$

d'où

$$(8)\qquad \begin{cases} N_z=N[(\cos\lambda\sin\varphi-\cos\mu\cos\varphi)\sin\theta+\cos\nu\cos\theta], \\ N_x=N(P\sin\psi+Q\cos\psi), \\ N_y=N(Q\sin\psi-P\cos\psi). \end{cases}$$

Les deux premières des équations (4) deviennent, par suite,

$$(4')\qquad \begin{cases} A\dfrac{dn}{dt}+(C-A)pq=\quad lN(Q\sin\psi-P\cos\psi), \\ A\dfrac{dp}{dt}+(A-C)nq=-lN(P\sin\psi+Q\cos\psi). \end{cases}$$

Les équations (2), (3), (5), (4') permettront de déterminer en fonction du temps les inconnues X'_1, Y'_1, Z'_1, n, p, φ, ψ, θ, N; mais, comme les intégrations ne peuvent pas s'effectuer, on doit se borner à calculer des valeurs approchées de ces inconnues, en restreignant le problème général au moyen de certaines hypothèses que l'on fera connaître à mesure qu'elles deviendront nécessaires.

Première hypothèse. — Nous supposerons que la rotation q est très grande, que les angles λ, μ, ν varient assez lentement pour qu'on puisse les considérer comme constants pour un certain nombre de révolutions du corps autour de Oz, et enfin que φ, θ, N varient aussi très lentement, ce qui exigera

que certaines conditions, que l'on établira *a posteriori*, soient remplies.

En négligeant en conséquence le second terme de la troisième des équations (5) et mesurant le temps à partir de $\psi = 0$, nous aurons

$$\psi = -qt$$

et les équations (4') deviendront

$$A\frac{dn}{dt} + (C - A)pq = -lN(Q\sin qt + P\cos qt),$$

$$A\frac{dp}{dt} + (A - C)nq = \quad lN(P\sin qt - Q\cos qt);$$

d'où, en considérant N, P et Q comme constantes et désignant par α et β deux constantes arbitraires,

$$n = \alpha\sin\frac{A-C}{A}qt + \beta\cos\frac{A-C}{A}qt - \frac{lN}{Cq}(P\sin qt - Q\cos qt),$$

$$p = \alpha\cos\frac{A-C}{A}qt - \beta\sin\frac{A-C}{A}qt - \frac{lN}{Cq}(P\cos qt + Q\sin qt).$$

Si l'on désigne par N_0, P_0, Q_0 les valeurs initiales de N, P, Q, pour lesquelles $n = 0$, $p = 0$, ces expressions prennent la forme suivante :

$$(9)\quad \begin{cases} n = \dfrac{l}{Cq}\left[N_0\left(P_0\sin\dfrac{A-C}{A}qt - Q_0\cos\dfrac{A-C}{A}qt\right) - N(P\sin qt - Q\cos qt)\right], \\ p = \dfrac{l}{Cq}\left[N_0\left(P_0\cos\dfrac{A-C}{A}qt + Q_0\sin\dfrac{A-C}{A}qt\right) - N(P\cos qt + Q\sin qt)\right]. \end{cases}$$

et, en les substituant dans les équations (6), on trouve, en se rappelant que $\psi = -qt$,

$$(10)\quad \begin{cases} \sin\theta\dfrac{d\varphi}{dt} = \dfrac{l}{Cq}\left[N_0\left(P_0\cos\dfrac{Cqt}{A} - Q_0\sin\dfrac{Cqt}{A}\right) - NP\right], \\ \dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{l}{Cq}\left[-N_0\left(P_0\sin\dfrac{Cqt}{A} + Q_0\cos\dfrac{Cqt}{A}\right) + NQ\right]. \end{cases}$$

Si le rapport $\frac{C}{A}$ n'est pas très petit, il faut, pour que θ et φ varient lentement, ainsi qu'on l'a supposé *a priori*, que $P_0 = 0$, $Q_0 = 0$; c'est ce qui aura lieu si, à l'origine du temps,

Gz coïncide avec la normale au plan mobile, comme cela résulte de la deuxième et de la troisième des équations (8) en y supposant $N_x = 0$, $N_y = 0$, $\psi = 0$.

Les équations (10) se réduisent alors aux suivantes :

$$(10') \quad \begin{cases} \sin\theta \dfrac{d\varphi}{dt} = -\dfrac{lNP}{Cq}, \\ \dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{lNQ}{Cq}. \end{cases}$$

Deuxième hypothèse. — On supposera que : 1° θ reste assez petit pour que l'on puisse prendre $\cos\theta = 1$; 2° le plan mobile reste assez peu incliné sur le plan horizontal pour qu'on puisse aussi poser $\cos\nu = 1$ et négliger les carrés de $\cos\lambda$, $\cos\mu$, leur produit entre eux et par $\sin\theta$; l'équation (3) devient alors

$$Z'_1 = l + \zeta - X'_1 \cos\lambda - Y'_1 \cos\nu;$$

d'ailleurs, ζ est l'ordonnée de l'intersection du plan mobile avec OZ′ ou, si l'on veut, le déplacement translatoire vertical de ce plan. Si donc les oscillations verticales sont très petites, il en sera de même de $\dfrac{d^2 Z'_1}{dl^2}$, et, d'après la troisième des équations (2), on aura, aux termes du premier ordre près,

$$N = Mg;$$

comme P et Q sont de cet ordre, on pourra introduire cette valeur de N dans les équations (10′), qui deviendront

$$\sin\theta \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{lMgP}{Cq},$$
$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{lMgQ}{Cq},$$

ou, en remplaçant P et Q par leurs valeurs (7),

$$(10'') \quad \begin{cases} \sin\theta \dfrac{d\varphi}{dt} = \dfrac{lMg}{Cq}(\sin\theta - \sin\lambda \sin\varphi + \cos\mu \cos\varphi), \\ \dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{lMg}{Cq}(\cos\lambda \cos\varphi + \cos\mu \sin\varphi). \end{cases}$$

Les deux premières des équations (2) se réduisent aux sui-

vantes

$$(2') \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2 X'_1}{dt^2} = g\cos\lambda, \\ \dfrac{d^2 Y'_1}{dt^2} = g\cos\mu, \end{cases}$$

qui feront connaître X'_1 et Y'_1.

Soient

$$c = \cos\widehat{zGX}, \qquad c' = \cos\widehat{zGY},$$

à l'inspection des formules (a'), on voit que

$$(b) \qquad c = \sin\theta\sin\varphi, \qquad c' = -\sin\theta\cos\varphi;$$

d'où

$$\frac{dc}{dt} = \sin\varphi\frac{d\theta}{dt} + \sin\theta\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt},$$

$$\frac{dc'}{dt} = -\cos\varphi\frac{d\theta}{dt} + \sin\theta\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}.$$

Si l'on porte les valeurs $(10'')$ dans ces formules, on trouve

$$(11) \qquad \begin{cases} \dfrac{dc}{dt} + mc' = m\cos\mu, \\ \dfrac{dc'}{dt} - mc = -m\cos\lambda; \end{cases}$$

en posant

$$(12) \qquad m = \frac{lMg}{Cq}.$$

Ces équations ont pour intégrales

$$(13) \qquad \begin{cases} c = c_0\cos mt - c'_0\sin mt \\ \qquad + m\cos mt\displaystyle\int_0^t(\cos\mu\cos mt - \cos\lambda\sin mt)\,dt \\ \qquad + m\sin mt\displaystyle\int_0^t(\cos\lambda\cos mt + \cos\mu\sin mt)\,dt, \\ c' = c'_0\cos mt + c_0\sin mt \\ \qquad - m\cos mt\displaystyle\int_0^t(\cos\lambda\cos mt + \cos\mu\sin mt)\,dt \\ \qquad + m\sin mt\displaystyle\int_0^t(\cos\mu\cos mt - \cos\lambda\sin mt)\,dt. \end{cases}$$

Les constantes c_0, c'_0 seront nulles si θ est nul pour $t = 0$, c'est-à-dire si, à l'instant initial, l'axe de révolution, qui déjà coïncide avec la normale au plan mobile, est de plus vertical, comme on le supposera.

Comme m est très petit en raison de la grande valeur admise pour q, l'angle $\theta = \sqrt{c^2 + c'^2}$ restera très petit.

Il résulte de là que, si la toupie est terminée à sa partie supérieure par une face plane normale à l'axe de révolution et si à l'instant initial cette face est horizontale, elle conservera son horizontalité pendant toute la durée du mouvement. C'est en partant de ce principe qu'on a cherché à créer, sur les navires, un horizon artificiel indépendant du roulis et du tangage.

Les équations (b) donnent

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{c}{c'}$$

et la troisième des équations (5)

$$\psi = -qt + \varphi - \varphi_0.$$

Les deux autres des équations précitées feront connaître n et p.

En raison de la petitesse de m, on peut considér $\sin mt$ et $\cos mt$ comme constants dans les intégrales des formules (13); car, en intégrant par partie, on a, par exemple,

$$\int \cos\lambda \cos mt\, dt = \cos mt \int \cos\lambda\, dt + m \sin mt \int\int \cos\lambda\, dt^2 + \ldots,$$

et si les variations de $\cos\lambda$, quoique très lentes par rapport à la rotation du mobile, sont cependant très rapides par rapport à celles de $\sin mt$, $\cos mt$, cette série sera rapidement convergente et pourra se réduire à son premier terme; ce qui reviendra à considérer $\cos mt$ comme constant dans l'intégrale

$$\int \cos\lambda \cos mt\, dt.$$

En supposant nuls c_0, c'_0 et ayant égard aux valeurs (b), les

équations (13) deviennent

$$(14)\qquad \begin{cases} \sin\theta\sin\varphi = \dfrac{lMg}{Cq}\displaystyle\int_0^t \cos\mu\, dt, \\ \sin\theta\cos\varphi = -\dfrac{lMg}{Cq}\displaystyle\int_0^t \cos\lambda\, dt; \end{cases}$$

mais, si l'on a $\frac{dX'_1}{dt} = 0$, $\frac{dY_1}{dt} = 0$ pour $t = 0$, les équations (2') donnent

$$\frac{dX'_1}{dt} = g\int_0^t \cos\lambda\, dt,$$

$$\frac{dY'_1}{dt} = g\int_0^t \cos\mu\, dt,$$

et l'on a, par suite,

$$\tang\varphi = -\frac{dY'_1}{dX'_1}.$$

Il résulte de là que la droite symétrique de GA par rapport à GX est constamment parallèle à la tangente à la projection horizontale du lieu du centre de gravité.

Si l'on désigne par W la composante horizontale de la vitesse du centre de gravité, les équations (14) donnent

$$\sin\theta = \frac{lM}{Cq}\,W.$$

Tout ce qui précède suppose que la rotation q est très grande Mais le frottement de la pointe sur le plan mobile et la résistance de l'air réduiront constamment cette rotation, l'axe Gz s'écartera de plus en plus de la verticale et la toupie finira par tomber sur le plan mobile.

CHAPITRE VII.

DU CHOC DES CORPS SOLIDES.

66. Lorsque deux corps solides naturels, en mouvement relatif, ayant pour masses M, M′ (libres ou assujettis à des liaisons, telles qu'un point fixe ou un axe fixe), viennent à se rencontrer, il se produit un effet mécanique qui a reçu le nom de *choc*.

Dans la région de leur contact, les corps se déforment mutuellement et graduellement et finissent par se séparer, à moins qu'ils ne viennent constituer entre eux un nouveau solide.

Comme nous admettrons qu'il n'y a pas de rupture, les variations relatives des distances intermoléculaires seront très petites; par suite, les déformations seront aussi très petites.

La durée du choc, variable avec les circonstances dans lesquelles il se produit, ne paraît pas devoir atteindre $\frac{1}{100}$ de seconde.

Pendant cette courte durée, les molécules peuvent être considérées géométriquement comme immobiles.

Cependant, du commencement à la fin du choc, les vitesses des molécules ont notablement changé en général en grandeur et en direction.

Ces changements brusques de vitesse sont dus aux forces moléculaires développées entre les deux corps, dans les régions du contact, forces qui peuvent atteindre une grande énergie.

On doit donc concevoir que la durée du choc se divise en trois périodes :

1° Les corps se dépriment mutuellement et graduellement

jusqu'à l'instant où ils atteignent leur plus grande déformation.

2° Cette déformation maximum se maintient pendant un temps extrêmement court, infiniment petit si l'on veut. Pendant ce temps, chacun des corps constitue rigoureusement un système invariable, et les composantes normales des vitesses des points de contact, de l'un et l'autre corps, sont égales. Dans son mouvement relatif par rapport à M', le corps M pivote en quelque sorte sur M' avec un glissement latéral qui donne lieu à un frottement dont on fera abstraction dans ce qui suit.

3° A partir de la fin de la seconde période, les corps tendent à reprendre leur forme primitive, de laquelle ils s'éloignent plus ou moins au moment où le choc cesse.

Dans la première période, il se produit un travail moléculaire négatif dû au rapprochement des molécules de M, M', dans la région du contact.

De la deuxième à la fin de la troisième, la détente des ressorts moléculaires restitue une partie du travail perdu dans la première.

67. *Évaluation du travail perdu dans la première partie du choc.* — Soient

v_0 la vitesse de la molécule m de M au commencement du choc, pris pour origine de t;

v la vitesse de cette molécule à l'instant t de la première période;

N la réaction normale de M' sur M en un point quelconque du contact;

Ox, Oy, Oz trois axes rectangulaires fixes;

$\delta x + \delta y + \delta z$ un déplacement virtuel de m compatible avec les liaisons du corps M considéré comme invariable;

δn le déplacement du point d'application de la réaction N de M' sur M, projeté sur sa direction.

Nous avons donc pour M

$$(1) \qquad \Sigma m \left(\frac{dv_x}{dt} \delta x + \frac{dv_y}{dt} \delta y + \frac{dv_z}{dt} \delta z \right) = Som \mathrm{N}\, \delta n.$$

Si le corps M est libre, les δ s'exprimeront au moyen des coordonnées et de six déplacements arbitraires, savoir trois translatoires et trois giratoires; mais, comme on l'a fait remarquer plus haut, les coordonnées doivent être considérées comme invariables pendant le choc, d'où il suit que les δ peuvent être regardés comme constants. Il en serait de même si M était assujetti à se mouvoir autour d'un point fixe ou d'un axe fixe; car, dans le premier cas, les δ s'exprimeront au moyen de trois rotations arbitraires, et le second au moyen d'une seule rotation. Donc, quoi qu'il en soit, on peut intégrer l'équation ci-dessus en considérant les δ comme constants, ce qui donne

$$\Sigma m\,[(v_x - v_{0x})\,\delta x + (v_y - v_{0y})\,\delta y + (v_z - v_{0z})\,\delta z] = Som\,\delta n \int_0^t \mathrm{N}\,dt.$$

Supposons maintenant que t se rapporte à la fin de la première période du choc; comme le mouvement réel du corps pendant la seconde période est compatible avec les liaisons, s'il en existe, on peut prendre

$$\delta x = v_x\,dt, \qquad \delta y = v_y\,dt, \qquad \delta z = v_z\,dt,$$

et alors l'équation ci-dessus devient

$$dt\,\Sigma m\,(v^2 - v_x v_{0x} - v_y v_{0y} - v_z v_{0z}) = Som\,\delta n \int_0^t \mathrm{N}\,dt.$$

Nous aurons une équation semblable pour M'; mais, comme $\delta n = -\delta n'$, en ajoutant les deux équations, nous trouverons

$$0 = \Sigma m(v^2 - v_x v_{0x} - v_y v_{0y} - v_z v_{0z}),$$

le signe Σ s'étendant maintenant à l'ensemble des molécules de M et M'.

Soit

$$\mathrm{F} = \Sigma m(v^2 - v_0^2) = \Sigma m(v_x^2 - v_{0x}^2 + v_y^2 - v_{0y}^2 + v_z^2 - v_{0z}^2)$$

l'accroissement de la force vive des deux corps de la fin de la première au commencement de la première période du choc. En retranchant de cette expression le double de l'équation précédente, on trouve

$$\mathrm{F} = -\Sigma m[(v_{0x} - v_x)^2 + (v_{0y} - v_y)^2 + (v_{0z} - v_z)^2].$$

Donc :

La perte de force vive éprouvée par l'ensemble des deux corps, à la fin de la première période, est égale à la force vive due aux vitesses perdues. (Théorème de Carnot.)

Si l'on désigne par w la vitesse perdue par m, et par $\mathfrak{T}_1$ la valeur absolue du travail moléculaire absorbé dans la première période, on a

$$\mathfrak{T}_1 = \frac{1}{2} \Sigma m w^2.$$

68. *Demi-accroissement de la force vive après le choc.* — Soient v_3 la vitesse de la molécule m après le choc; $\mathfrak{T}_3$ le travail moléculaire restitué dans la troisième période, on a

$$\frac{\Sigma m v_3^2 - m v_0^2}{2} = -\mathfrak{T}_1 + \mathfrak{T}_3.$$

Avant de discuter cette équation, nous allons considérer les deux cas extrêmes suivants qui, envisagés chacun à un point de vue absolu, n'ont qu'un caractère hypothétique.

1° *Les corps choquants sont complètement dénués d'élasticité.* — C'est à peu près le cas de deux masses de plomb, d'argile peu humectée, etc. Ici le choc s'arrête à la fin de la première période et l'on a

$$\frac{\Sigma m v_3^2 - \Sigma m v_0^2}{2} = -\mathfrak{T}_1 = -\frac{1}{2} \Sigma m w^2.$$

2° *Les corps sont parfaitement élastiques.* — Les corps reviennent exactement à leur forme primitive après le choc : ce qui se rapproche du cas de deux billes d'ivoire, d'une bille et d'une table de marbre, etc. Le travail moléculaire développé dans le choc étant nul, on a

$$\frac{\Sigma m v_3^2 - \Sigma m v_0^2}{2} = 0.$$

Revenons maintenant à la réalité ou aux corps semi-élastiques. Il paraîtrait naturel de poser

$$\mathfrak{T}_3 = \nu \mathfrak{T}_1,$$

ν étant une fraction dépendant de la nature des corps cho-

quants et peut-être de leur forme dans les environs de la zone de contact; alors on aurait

$$(\alpha) \qquad \Sigma m v_3^2 - \Sigma m v_1^2 = -\mu \Sigma m w^2,$$

en posant

$$1 - \nu = \mu;$$

mais on admet que la perte de force vive après le choc est proportionnelle à la force vive due aux vitesses perdues w_3, et l'on pose en conséquence

$$(\beta) \qquad \Sigma m v_3^2 - \Sigma m v_0^2 = -\varepsilon \Sigma m w_3^2,$$

ε étant un coefficient spécifique de même nature que μ.

Cette dernière équation s'applique aussi aux deux cas extrêmes ci-dessus, en y faisant respectivement $\varepsilon = 1$ et $\varepsilon = 0$.

Nous ferons remarquer plus loin que les deux hypothèses que nous venons d'énoncer conduisent à des résultats de la même forme dans la question du choc de deux corps libres.

69. *Mouvement que prennent deux corps choquants libres après le choc.* — Considérons d'abord le corps M, et soient

A le *point de choc* ou le point de la surface par lequel passe la résultante N des réactions, variables avec t, de M′ aux différents points de la zone de contact avec M;

AX la direction de N;

AY, AZ deux axes rectangulaires perpendiculaires à AX;

X_1, Y_1, Z_1 les coordonnées du centre de gravité G de M;

Gx, Gy, Gz les parallèles en G à AX, AY, AZ;

et avant le choc :

V_0, W_0 les vitesses de G et A, estimées suivant AX;

n_0, p_0, q_0 les composantes de la rotation instantanée de M suivant Gx, Gy, Gz;

P_0 le moment des quantités de mouvement giratoire autour de G;

J_0 la force vive correspondante;

$Ma^2 = \Sigma m(y^2 + z^2)$, $Mb^2 = \Sigma m(z^2 + x^2)$, $Mc^2 = \Sigma m(x^2 + y^2)$ les moments d'inertie de M par rapport à Gx, Gy, Gz;

$\Sigma myz = M\chi$, $\Sigma mzx = M\eta$, $\Sigma mxy = M\zeta$ des quantités que l'on sait calculer.

Nous supprimerons l'indice o pour les quantités qui se rapportent à la fin du choc, et nous affecterons de l'indice x, par exemple, la projection d'une longueur sur l'axe AX.

Nous avons [1]

$$(A)\qquad \begin{cases} P_x = M(na^2 - p\zeta - q\eta), & P_{0x} = \ldots, \\ P_y = M(pb^2 - q\chi - n\zeta), & P_{0y} = \ldots, \\ P_z = M(qc^2 - n\eta - p\chi), & P_{0z} = \ldots \end{cases}$$

et

$$(B)\qquad J = nP_x + pP_y + qP_z, \qquad J_0 = \ldots.$$

La vitesse du centre de gravité G, estimée dans le plan YAZ, restant constante en grandeur et en direction pendant la durée du choc, n'intervient pas dans les équations du mouvement, et l'on peut en faire abstraction, ce qui revient à considérer V_0 et V comme étant parallèles à AX.

Nous avons

$$(1)\qquad W = V - pZ_1 + qY_1, \qquad W_0 = \ldots$$

et, pour l'équation du mouvement de translation,

$$(2)\qquad M(V - V_0) = \int N\,dt.$$

Les équations du corps autour de son centre de gravité sont les suivantes :

$$(3)\qquad \begin{cases} P_x - P_{0x} = M[a^2(n-n_0) - \zeta(p-p_0) - \eta(q-q_0)] = 0, \\ P_y - P_{0y} = M[b^2(p-p_0) - \chi(q-q_0) - \zeta(n-n_0)] = -Z_1\int N\,dt, \\ P_z - P_{0z} = M[c^2(q-q_0) - \eta(n-n_0) - \chi(p-p_0)] = Y_1\int N\,dt, \end{cases}$$

---

[1] Soit, par rapport à Ox, Oy, Oz, v la vitesse de l'élément matériel m ou (x, y, z), on a

$$v_x = pz - qy, \qquad v_y = qx - nz, \qquad v_z = ny - px$$

et

$$P_x = \Sigma m(v_z y - v_y z)\ldots, \qquad P_y = \ldots,$$

$$J = \Sigma m[(pz - qy)^2 + (qx - nz)^2 + (ny - pz)^2]$$
$$= M(a^2n^2 + b^2p^2 + c^2q^2 - 2\chi pq - 2\eta qn - 2\zeta np).$$

ou, en éliminant l'impulsion au moyen de l'équation (2),

$$(4)\quad \begin{cases} a^2(n-n_0)-\zeta(p-p_0)-\eta(q-q_0)=0, \\ b^2(p-p_0)-\chi(q-q_0)-\zeta(n-n_0)=-Z_1(V-V_0), \\ c^2(q-q_0)-\eta(n-n_0)-\chi(p-p_0)=Y_1(V-V_0); \end{cases}$$

on tire de là

$$(5)\quad \begin{cases} n-n_0=\alpha(V-V_0), \\ p-p_0=\beta(V-V_0), \\ q-q_0=\gamma(V-V_0), \end{cases}$$

les coefficients α, β, γ étant déterminés par les équations

$$(6)\quad \begin{cases} a^2\alpha-\zeta\beta-\eta\gamma=0, \\ b^2\beta-\chi\gamma-\zeta\alpha=-Z_1, \\ c^2\gamma-\eta\alpha-\chi\beta=Y_1. \end{cases}$$

Des équations (A) on déduit, en ayant égard aux relations (6) et (1),

$$\alpha P_x+\beta P_y+\gamma P_z=M(-pZ_1+qY_1)=M(W-V);$$

par suite,

$$(7)\quad \alpha P_{0x}+\beta P_{0y}+\gamma P_{0z}=M(W_0-V_0).$$

L'équation (1) nous donne, en nous reportant aux valeurs (5),

$$W-W_0=(V-V_0)[1-\beta Z_1+\gamma Y_1]$$

ou

$$(8)\quad W=\lambda(V-V_0)+W_0,$$

en posant

$$(8')\quad \lambda=1-\beta Z_1+\gamma Y_1.$$

Nous reconnaîtrons plus loin que la constante λ ne peut pas être inférieure à l'unité.

L'accroissement de la force vive après le choc est, en ayant égard à la valeur de J,

$$\begin{aligned} F &= M(V^2-V_0^2)+P_x n-P_{0x}n_0+P_y p-P_{0y}p_0+P_z q-P_{0z}q \\ &= M(V^2-V_0^2)+(P_x-P_{0x})n+(P_y-P_{0y})p+(P_z-P_{0z})q \\ &\qquad +P_{0x}(n-n_0)+P_{0y}(p-p_0)+P_z(q-q_0). \end{aligned}$$

Mais les premiers membres des équations (4), multipliés par M, ne sont autre chose que les valeurs de $P_x - P_{0x}$, $P_y - P_{0y}$, $P_z - P_{0z}$; si, de plus, on substitue dans l'équation précédente les valeurs (5), on trouve

$$F = (V - V_0)\left\{[M(V + V_0) - pZ_1 + qY_1] + \alpha P_{0x} + \beta P_{0y} + \gamma P_{0z}\right\}$$

ou, vu (7),

$$F = M(V - V_0)(V + W_0 - pZ_1 + qY_1).$$

Si l'on remplace maintenant p et q par leurs valeurs déduites des équations (5), on trouve

$$\begin{aligned} F &= M(V - V_0)[V + W_0 - p_0 Z_1 + q_0 Y_1 + (V - V_0)(-Z_1\beta + Y_1\gamma) \\ &= M(V - V_0)[V + W_0 - p_0 Z_1 + q_0 Y_1 + (V - V_0)(\lambda - 1)]. \end{aligned}$$

En substituant ensuite à $q_0 Y_1 - p_0 Z_1$ sa valeur fournie par l'équation (1), on a finalement

$$F = M(V - V_0)[\lambda(V - V_0) + 2W_0]. \tag{9}$$

La force vive G, due aux vitesses perdues après le choc, est égale à la somme des forces semblables du centre de gravité où la masse serait concentrée et du corps dans son mouvement relatif par rapport à ce centre [1]. La seconde de ces forces vives partielles s'obtiendra en remplaçant n, p, q par $n_0 - n$, $p_0 - p$, $q_0 - q$ dans la formule (B), par suite, dans les valeurs (A), et l'on obtiendra pour résultat

$$\begin{aligned} M\Big\{ & [a^2(n_0 - n) - \zeta(p_0 - p) - \eta(q_0 - q)](n_0 - n) \\ & + [b^2(p_0 - p) - \chi(q_0 - q) - \zeta(n_0 - n)](p_0 - p) \\ & + [c^2(q_0 - q) - \eta(n_0 - n) - \chi(p_0 - p)](q_0 - q)\Big\} \end{aligned}$$

---

[1] Soient, en général, U la vitesse du centre de gravité; u la vitesse relative de m; la force vive due aux vitesses perdues est

$$\begin{aligned} & \Sigma m[(U_{0x} + u_{0x} - U_x - u_x)^2 + \ldots] \\ & = M[(U_{0x} - U_x)^2 + (U_{0y} - U_y)^2 + (U_{0z} - U_z)^2] \\ & \quad + \Sigma m[(u_{0x} - u_x)^2 + (u_{0y} - u_y)^2 + (u_{0z} - u_z)^2] \\ & \quad - 2(U_{0x} - U_x)\Sigma m(u_{0x} - u_{0y}) - 2\ldots, \end{aligned}$$

et, comme $\Sigma m u_{0x} = 0$, $\Sigma m u_x = 0$, ..., on arrive au théorème énoncé.

ou, en se reportant aux valeurs (5), puis aux relations (6),

$$M(V-V_0)^2[(a^2\alpha-\zeta\beta-\eta\gamma)\alpha+(b^2\beta-\chi\gamma-\zeta\alpha)\beta+(c^2\gamma-\eta\alpha-\chi\beta)\gamma]$$
$$=M(V-V_0)^2(-\beta Z_1+\gamma Y_1).$$

ou encore, vu (8′),

$$M(V-V_0)^2(\lambda-1).$$

Comme, par sa nature, cette quantité est essentiellement positive, on voit que $\lambda \geqq 1$.

Nous avons donc pour la force vive totale due aux vitesses perdues

$$(10) \qquad G = M\lambda(V-V_0)^2.$$

Nous accentuerons les lettres pour le second corps; mais, si nous rapportons son mouvement à OX, OY, OZ, nous devrons changer le signe de N dans les équations (2) et (3), et nous aurons d'abord

$$(2') \qquad M'(V'-V'_0) = -\int N\,dt.$$

Les formules (9) et (10) s'appliquent ici sans restriction, puisqu'elles ne résultent que de l'élimination de $\int N\,dt$ entre les équations (2) et (3) et que, par suite, elles sont indépendantes du signe de N.

Des équations (2) et (2′) on tire

$$(11) \qquad M(V-V_0)+M'(V'-V'_0)=0.$$

En nous reportant à la formule (β), nous avons à exprimer que

$$F+F'=-\varepsilon(G+G'),$$

ou que

$$M(V-V_0)[\lambda(V-V_0)+2W_0]+M'(V'-V'_0)[\lambda'(V'-V'_0)+2W'_0]$$
$$=-\varepsilon[M\lambda(V-V_0)^2+M'\lambda'(V'-V'_0)^2],$$

ou encore, vu (11), que

$$\lambda(V-V_0)+2W_0-[\lambda'(V'-V'_0)+2W'_0]$$
$$=-\varepsilon[\lambda(V-V_0)-\lambda'(V'-V'_0)].$$

De cette dernière équation et de l'équation (11) on tire

$$(12)\qquad \begin{cases} V - V_0 = \dfrac{2M'(W'_0 - W_0)}{(1+\varepsilon)(M'\lambda + M\lambda')}, \\ V' - V'_0 = \dfrac{2M(W_0 - W'_0)}{(1+\varepsilon)(M'\lambda + M\lambda')}, \end{cases}$$

et, en se reportant à la formule (8),

$$(13)\qquad \begin{cases} W = \dfrac{2\lambda M'(W'_0 - W_0)}{(1+\varepsilon)(M'\lambda + M\lambda')} + W_0, \\ W' = \dfrac{2\lambda' M(W_0 - W'_0)}{(1+\varepsilon)(M'\lambda + M\lambda')} + W'_0. \end{cases}$$

Enfin on a, pour la perte de force vive $\varepsilon(G + G')$ éprouvée après le choc par les deux corps,

$$(14)\qquad \frac{4\varepsilon MM'}{(1+\varepsilon)^2}\,\frac{(W'_0 - W_0)^2}{M'\lambda + M\lambda'},$$

dont la moitié représente le travail perdu pendant le choc et qui a été employé à déformer les corps.

En supposant $\varepsilon = 1$, on a, pour la perte de force vive dans un choc de deux corps dénués d'élasticité,

$$\frac{MM'(W'_0 - W_0)^2}{M'\lambda + M\lambda'}.$$

Cette expression représente aussi la perte de force vive à la fin de la première période du choc de deux corps quelconques.

Si l'on adopte l'hypothèse représentée par la formule (α), on a

$$M(V - V_0)[\lambda(V - V_0) + 2W_0] + M'(V' - V'_0)[\lambda'(V' - V'_0) + 2W'_0]$$
$$= -\frac{\mu MM'(W'_0 - W_0)^2}{M'\lambda + M\lambda'}$$

ou, en éliminant V' au moyen de l'équation (11),

$$V - V_0 = \frac{M'(W'_0 - W_0)}{M'\lambda + M\lambda'}(1 + \sqrt{1 - \mu}).$$

Cette valeur s'accordera avec la première des équations (12), en prenant

$$\mu = \frac{4\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2}.$$

Peu importe donc l'une ou l'autre hypothèse, puisque l'on n'a, en définitive, qu'un seul coefficient à déterminer par l'expérience.

On dit que le choc est *direct* quand la normale au point de choc passe par les centres de gravité des deux corps. Dans ce cas, on a $\lambda = 1$, $\lambda' = 1$, et, vu (1), $W = V$, $W' = V'$ et, par suite, les mêmes relations avec l'indice o.

Admettons que, dans le choc direct, la masse M', d'abord en repos, soit assez grande pour être considérée comme infinie par rapport à M'; les formules (12) donnent $V' = 0$ et

$$\frac{V^2}{V_0^2} = \left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^2.$$

Ce cas est sensiblement celui d'une bille d'ivoire tombant verticalement sur une table horizontale de marbre. On a constaté que la bille se relevait, après le choc, aux $\frac{2}{3}$ de la hauteur primitive. En admettant donc $\frac{V^2}{V_0^2} = \frac{2}{3}$, on trouve

$$\varepsilon = 0,101.$$

70. *Du choc de deux corps solides, dont l'un* M *est libre, tandis que l'autre* M' *est assujetti à tourner autour d'un axe fixe* OZ'. — On prendra pour origine le pied O de la perpendiculaire abaissée de G' sur l'axe fixe; l'axe OY' sera dirigé suivant OG. On choisira le sens de OX' de manière que la projection de $\int N\,dt$ sur sa direction soit positive.

Soient

$OG' = l$;

I' le moment d'inertie de M' par rapport à OZ';

a, b, c les coordonnées du point de choc A parallèles à OX', OY', OZ';

α, β, γ les angles formés par $\int N\,dt$ avec OX', OY', OZ';

ω'_0, ω' les vitesses angulaires de M' avant et après le choc, censées positives de la gauche vers la droite en se couchant suivant Z'O.

En conservant les notations qui précèdent, on a d'abord,

pour M,

$$(1)\quad \begin{cases} F = M(V - V_0)[\lambda(V - V_0) + 2W_0], \\ G = M\lambda(V - V_0)^2, \\ M(V - V_0) = \int N\,dt. \end{cases}$$

Les moments de $-\int N\,dt$ par rapport à OX′, OY′, OZ′ sont

$$(2)\quad \begin{cases} \mathfrak{M}_{X'} = (c\cos\beta - b\cos\gamma)\int N\,dt, \\ \mathfrak{M}_{Y'} = (a\cos\gamma - c\cos\alpha)\int N\,dt, \\ \mathfrak{M}_{Z'} = (b\cos\alpha - a\cos\beta)\int N\,dt. \end{cases}$$

On a, pour le corps M′, en prenant les moments par rapport à OZ′,

$$(3)\qquad I'(\omega' - \omega'_0) = (b\cos\alpha - a\cos\beta)\int N\,dt$$

ou, en vertu de la troisième des équations (1),

$$(4)\qquad I'(\omega' - \omega'_0) = (b\cos a - \alpha\cos\beta)M(V - V_0).$$

L'équation des forces vives donne

$$\begin{aligned} &M(V - V_0)[\lambda(V - V_0) + 2W_0] + I'(\omega'^2 - \omega'^2_0) \\ &\quad = -\varepsilon[M\lambda(V - V_0)^2 + I'(\omega' - \omega'_0)^2] \end{aligned}$$

ou, en éliminant $I'(\omega' - \omega'_0)$ au moyen de l'équation (4),

$$\begin{aligned} &\lambda(1 + \varepsilon)(V - V_0) + (1 + \varepsilon)(b\cos\alpha - a\cos\beta)\omega' \\ &\quad = -2W_0 - (1 - \varepsilon)(b\cos\alpha - a\cos\beta)\omega'_0, \end{aligned}$$

et, enfin, en éliminant $(V - V_0)$ au moyen de l'équation précitée, on a, pour déterminer ω',

$$(5)\quad \begin{cases} (1 + \varepsilon)[\lambda I' + M(b\cos\alpha - a\cos\beta)^2]\omega' \\ \quad = [(1 + \varepsilon)\lambda I' - (1 - \varepsilon)M(b\cos\alpha - a\cos\beta)^2]\omega'_0 \\ \quad\quad - 2M(b\cos\alpha - a\cos\beta)W_0. \end{cases}$$

Proposons-nous maintenant de déterminer les conditions qui doivent être remplies pour que les guides de l'axe OZ′ ne reçoivent pas de percussion.

Nous avons d'abord en projection sur OY′, OZ′

$$\cos\beta \int N\,dt = 0, \qquad \cos\gamma \int N\,dt = 0;$$

d'où $\beta = 90°$, $\gamma = 90°$ et $\alpha = 0$, conditions que nous supposerons remplies.

Si nous remarquons que la vitesse $l\omega'$ de G′ est dirigée dans le sens négatif de OX′, nous avons aussi

$$(6) \qquad Ml(\omega' - \omega'_0) = \int N\,dt;$$

d'où, en vertu de l'équation (3),

$$(7) \qquad I' = M'bl,$$

ce qui exprime que le point de choc doit se trouver dans le plan parallèle à X′OZ′ passant par le centre d'oscillation de M′.

La vitesse du point m de M′, dont les coordonnées sont x, y, z, due à la rotation ω', ayant pour composantes $-\omega' y$ suivant OX′ et $\omega' x$ suivant OY′, on a

$$(\omega' - \omega'_0)\,\Sigma myz = \mathfrak{M}_{X'},$$
$$(\omega' - \omega_0)\,\Sigma mxz = \mathfrak{M}_{Y'}$$

ou

$$(8) \qquad \Sigma myz = 0$$

et

$$(\omega' - \omega'_0)\,\Sigma mxz = c\int N\,dt.$$

De cette dernière équation et de l'équation (3) on déduit

$$(9) \qquad c = \frac{b\,\Sigma mxz}{I'}.$$

On voit que, si OZ′ est un axe principal d'inertie, il n'y aura pas de percussion sur cet axe, si la direction de W_0 est perpendiculaire au plan Z′OY′ et passe par le centre d'oscillation de M′.

En admettant qu'il en soit ainsi, les formules (4) et (5) deviennent

$$(4') \qquad I'(\omega' - \omega'_0) = Mb(V - V_0),$$

$$(5') \qquad \omega' = \frac{[(1+\varepsilon)\lambda I' - (1-\varepsilon)Mb^2]\,\omega'_0 - 2MbW_0}{(1+\varepsilon)(\lambda I' + Mb^2)}.$$

On déduit de la seconde de ces équations

$$\omega' - \omega'_0 = -\frac{2Mb[b\omega'_0 + W_0]}{(1+\varepsilon)(\lambda I' + Mb^2)}.$$

En se reportant à l'équation (6) on voit que, pour que $\int N\,dt$ soit positif comme on l'a supposé, il faut que

$$b\omega'_0 + W_0 < 0,$$

ce qui est la condition, évidente *a priori*, pour que les deux corps puissent se rencontrer.

Si M′ est au repos à l'instant où le choc commence, W_0 est nécessairement négatif, et l'on a

$$\omega' = -\frac{2MbW_0}{(1+\varepsilon)(\lambda I' + Mb^2)}.$$

Dans le cas où les deux corps sont dénués d'élasticité et où le centre de gravité de M se trouve sur la direction de W_0, on a $\varepsilon = 1$, $\lambda = 1$, $W_0 = V_0$ et

$$\omega' = -\frac{MbW_0}{I' + Mb^2}.$$

Si Mb^2 est négligeable devant I′, on retombe sur la formule connue qui se rapporte au pendule balistique.

CHAPITRE VIII.

HYDRODYNAMIQUE.

§ I. — *Développements sur quelques questions* [1].

71. *Démonstration due à Cauchy du théorème de Lagrange relatif au potentiel de la vitesse.* — Nous avons cru utile de substituer cette démonstration à celle de Lagrange, qui est considérée comme insuffisante.

Soient

Ox, Oy, Oz trois axes rectangulaires fixes;

U le potentiel rapporté à l'unité de masse des forces extérieures qui sollicitent les molécules fluides

et, à l'instant t,

x, y, z les coordonnées d'une molécule m;

u, v, w et $u' = \frac{du}{dt}$, $v' = \frac{dv}{dt}$, $w' = \frac{dw}{dt}$ les composantes respectives suivant Ox, Oy, Oz de la vitesse et de l'accélération de m;

p, ρ la pression et la densité du fluide au point (x, y, z), la densité ρ étant constante ou étant une fonction donnée de p.

Nous avons, pour trois des équations du mouvement du fluide,

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} - u',$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y} - v',$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial z} - w'.$$

[1] *Voir* le Chapitre XIII du Tome II.

Si l'on pose

$$(1)\qquad \int \frac{1}{\rho}\,dp - U = Q,$$

il vient

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial x} + u' = 0, \\ \dfrac{\partial Q}{\partial y} + v' = 0, \\ \dfrac{\partial Q}{\partial z} + w' = 0. \end{cases}$$

Nous caractériserons par l'indice o les éléments qui se rapportent à l'état initial d'une molécule. Comme, en suivant la molécule m, ses coordonnées x, y, z dépendent de x_0, y_0, z_0, t, on peut écrire

$$(3)\qquad x = f(x_0, y_0, z_0, t), \quad y = f_1(x_0, y_0, z_0, t), \quad z = f_2(x_0, y_0, z_0, t).$$

Dans ces conditions, on a

$$(4)\qquad u = \frac{\partial x}{\partial t}, \qquad v = \frac{\partial y}{\partial t}, \qquad w = \frac{\partial z}{\partial t},$$

et, au lieu des équations (2),

$$(2')\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0, \\ \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial t} = 0, \\ \dfrac{\partial Q}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial t} = 0. \end{cases}$$

Au nouveau point de vue auquel nous nous plaçons, nous avons

$$\frac{\partial Q}{\partial x_0} = \frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x_0} + \frac{\partial Q}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x_0} + \frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_0},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y_0} = \frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y_0} + \frac{\partial Q}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y_0} + \frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y_0},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z_0} = \frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z_0} + \frac{\partial Q}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z_0} + \frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial z_0};$$

d'où, en éliminant $\frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial z}$ au moyen des formules (2'),

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial x_0} + \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial x_0} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial x_0} + \frac{\partial Q}{\partial x_0} = 0,\\ &\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial y_0} + \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial y_0} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial y_0} + \frac{\partial Q}{\partial y_0} = 0,\\ &\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial z_0} + \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial z_0} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial z_0} + \frac{\partial Q}{\partial z_0} = 0.\end{aligned}\right.$$

Si l'on retranche : 1° la deuxième de ces équations différentiée par rapport à x_0 de la première différentiée par rapport à y_0 ; 2° la troisième différentiée par rapport à y_0 de la deuxième différentiée par rapport à z_0 ; 3° la première différentiée par rapport à z_0 de la troisième différentiée par rapport à x_0, on obtient trois nouvelles équations indépendantes de Q, et il suffit de considérer la première dont on déduira les deux autres par les permutations tournantes. Nous avons ainsi

$$(a)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial y_0}\frac{\partial x}{\partial x_0} - \frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial x_0}\frac{\partial x}{\partial y_0} + \frac{\partial^2 v}{\partial t\,\partial y_0}\frac{\partial y}{\partial x_0} - \frac{\partial^2 v}{\partial t\,\partial x_0}\frac{\partial y}{\partial y_0}\\ &\qquad + \frac{\partial^2 w}{\partial t\,\partial y_0}\frac{\partial z}{\partial x_0} - \frac{\partial^2 w}{\partial t\,\partial x_0}\frac{\partial z}{\partial y_0} = 0.\end{aligned}\right.$$

Si l'on différentie par rapport à t l'expression

$$(b)\quad \frac{\partial u}{\partial y_0}\frac{\partial x}{\partial x_0} - \frac{\partial u}{\partial x_0}\frac{\partial x}{\partial y_0} + \frac{\partial v}{\partial y_0}\frac{\partial y}{\partial x_0} - \frac{\partial v}{\partial x_0}\frac{\partial y}{\partial y_0} + \frac{\partial w}{\partial y_0}\frac{\partial z}{\partial x_0} - \frac{\partial w}{\partial x_0}\frac{\partial z}{\partial y_0},$$

et si l'on remarque que l'on a, par exemple,

$$\frac{\partial u}{\partial y_0}\frac{\partial^2 x}{\partial t\,\partial x_0} - \frac{\partial u}{\partial x_0}\frac{\partial^2 x}{\partial t\,\partial y_0} = \frac{\partial u}{\partial y_0}\frac{\partial u}{\partial x_0} - \frac{\partial u}{\partial x_0}\frac{\partial u}{\partial y_0} = 0,$$

on trouve le premier membre de l'équation (a) ; d'où il suit que l'expression (b) est constante, et comme, à l'instant initial ou pour $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, elle se réduit à $\frac{\partial u_0}{\partial y_0} - \frac{\partial v_0}{\partial x_0}$, il vient

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial y_0}\frac{\partial x}{\partial x_0} - \frac{\partial u}{\partial x_0}\frac{\partial x}{\partial y_0} + \frac{\partial v}{\partial y_0}\frac{\partial y}{\partial x_0} - \frac{\partial v}{\partial x_0}\frac{\partial y}{\partial y_0}\\ &\qquad + \frac{\partial w}{\partial y_0}\frac{\partial z}{\partial x_0} - \frac{\partial w}{\partial x_0}\frac{\partial z}{\partial y_0} = \frac{\partial u_0}{\partial y_0} - \frac{\partial v_0}{\partial x_0}.\end{aligned}\right.$$

Dans ce qui suit nous poserons

$$(7)\qquad \begin{cases} \chi = \dfrac{\partial v}{\partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial y}, & \chi_0 = \dfrac{\partial v_0}{\partial z_0} - \dfrac{\partial w_0}{\partial y_0}, \\ \eta = \dfrac{\partial w}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial z}, & \eta_0 = \dfrac{\partial w_0}{\partial x_0} - \dfrac{\partial u_0}{\partial z_0}, \\ \zeta = \dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial x}, & \zeta_0 = \dfrac{\partial u_0}{\partial y_0} - \dfrac{\partial v_0}{\partial x_0}. \end{cases}$$

En substituant dans l'équation (6) les expressions

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_0} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x_0} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x_0} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_0}, \\ \frac{\partial u}{\partial y_0} &= \ldots, \\ \frac{\partial v}{\partial x_0} &= \ldots, \\ \frac{\partial v}{\partial y_0} &= \ldots, \\ \frac{\partial w}{\partial x_0} &= \ldots, \\ \frac{\partial w}{\partial y_0} &= \ldots, \end{aligned}$$

on trouve

$$\zeta\left(\frac{\partial y}{\partial y_0}\frac{\partial x}{\partial x_0} - \frac{\partial y}{\partial x_0}\frac{\partial x}{\partial y_0}\right) + \chi\left(\frac{\partial z}{\partial y_0}\frac{\partial y}{\partial x_0} - \frac{\partial z}{\partial x_0}\frac{\partial y}{\partial y_0}\right) + \eta\left(\frac{\partial z}{\partial x_0}\frac{\partial x}{\partial y_0} - \frac{\partial z}{\partial y_0}\frac{\partial x}{\partial x_0}\right) = \zeta_0;$$

d'où l'on déduit, par les permutations tournantes,

$$\chi\left(\frac{\partial z}{\partial z_0}\frac{\partial y}{\partial y_0} - \frac{\partial z}{\partial y_0}\frac{\partial y}{\partial z_0}\right) + \eta\left(\frac{\partial x}{\partial z_0}\frac{\partial z}{\partial y_0} - \frac{\partial x}{\partial y_0}\frac{\partial z}{\partial z_0}\right) + \zeta\left(\frac{\partial y}{\partial z_0}\frac{\partial x}{\partial y_0} - \frac{\partial y}{\partial y_0}\frac{\partial x}{\partial z_0}\right) = \chi_0,$$

$$\eta\left(\frac{\partial x}{\partial x_0}\frac{\partial z}{\partial z_0} - \frac{\partial x}{\partial z_0}\frac{\partial z}{\partial x_0}\right) + \zeta\left(\frac{\partial y}{\partial x_0}\frac{\partial x}{\partial z_0} - \frac{\partial y}{\partial z_0}\frac{\partial x}{\partial x_0}\right) + \chi\left(\frac{\partial y}{\partial z_0}\frac{\partial z}{\partial x_0} - \frac{\partial y}{\partial z_0}\frac{\partial z}{\partial x_0}\right) = \eta_0.$$

Si l'on pose

$$\frac{\partial x}{\partial x_0}\frac{\partial y}{\partial y_0}\frac{\partial z}{\partial z_0} - \frac{\partial x}{\partial x_0}\frac{\partial y}{\partial z_0}\frac{\partial z}{\partial y_0} + \frac{\partial x}{\partial y_0}\frac{\partial y}{\partial x_0}\frac{\partial z}{\partial z_0} - \frac{\partial x}{\partial y_0}\frac{\partial y}{\partial z_0}\frac{\partial z}{\partial x_0} + \frac{\partial x}{\partial z_0}\frac{\partial y}{\partial y_0}\frac{\partial z}{\partial x_0} - \frac{\partial x}{\partial z_0}\frac{\partial y}{\partial x_0}\frac{\partial z}{\partial y_0} = \chi\left(\pm\frac{\partial x}{\partial x_0}\frac{\partial y}{\partial y_0}\frac{\partial z}{\partial z_0}\right),$$

les équations précédentes donnent [1]

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned}
\zeta &= \frac{1}{S\left(\pm\frac{\partial x}{\partial x_0}\frac{\partial y}{\partial y_0}\frac{\partial z}{\partial z_0}\right)}\left(\zeta_0\frac{\partial z}{\partial z_0}+\chi_0\frac{\partial x}{\partial x_0}+\eta_0\frac{\partial z}{\partial y_0}\right),\\
\chi &= \frac{1}{S\left(\pm\frac{\partial x}{\partial x_0}\frac{\partial y}{\partial y_0}\frac{\partial z}{\partial z_0}\right)}\left(\chi_0\frac{\partial x}{\partial x_0}+\eta_0\frac{\partial x}{\partial y_0}+\zeta_0\frac{\partial x}{\partial z_0}\right),\\
\eta &= \frac{1}{S\left(\pm\frac{\partial x}{\partial x_0}\frac{\partial y}{\partial y_0}\frac{\partial z}{\partial z_0}\right)}\left(\eta_0\frac{\partial y}{\partial y_0}+\zeta_0\frac{\partial y}{\partial z_0}+\chi_0\frac{\partial y}{\partial x_0}\right).
\end{aligned}\right.$$

Nous reconnaîtrons plus loin que le déterminant

$$S\left(\pm\frac{dx}{dx_0}\frac{dy}{dy_0}\frac{dz}{dz_0}\right)$$

ne peut pas être nul.

Si donc $\chi_0 = 0$, $\eta_0 = 0$, $\zeta_0 = 0$, ce qui aura lieu notamment lorsque le fluide partira du repos, on aura constamment $\chi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$, c'est-à-dire que

$$u\,dx + v\,dy + z\,dz$$

sera la différentielle d'une fonction φ de x, y, z qui, en général, renfermera le temps.

Soient dx_0, dy_0, dz_0 les arêtes d'un parallélépipède élémentaire partant de la position initiale de la molécule m. Ces arêtes, considérées comme matérielles, se modifieront pendant le mouvement, et, lorsque la molécule sera venue en (x, y, z), on aura

Au lieu de	Suivant Ox.	Suivant Oy.	Suivant Oz.
dx_0.....	$\frac{\partial x}{\partial x_0}dx_0$	$\frac{\partial y}{\partial x_0}dx_0$	$\frac{\partial z}{\partial x_0}dx_0$
dy_0.....	$\frac{\partial x}{\partial y_0}dy_0$	$\frac{\partial y}{\partial y_0}dy_0$	$\frac{\partial z}{\partial y_0}dy_0$
dz_0.....	$\frac{\partial x}{\partial z_0}dz_0$	$\frac{\partial y}{\partial z_0}dz_0$	$\frac{\partial z}{\partial z_0}dz_0$

[1] En faisant le calcul, il faut avoir soin de mettre en évidence aux numérateurs le facteur S, qui se présente naturellement. On voit ensuite facilement que le dénominateur commun est S^2.

La masse du parallélépipède déformé sera devenue (¹)

$$\rho S\left(\pm \frac{\partial x}{\partial x_0}\frac{\partial y}{\partial y_0}\frac{\partial z}{\partial z_0}\right) dx_0\, dy_0\, dz_0.$$

Or, comme elle était $\rho_0\, dx_0\, dy_0\, dz_0$ à l'instant initial et qu'elle n'a pas varié, on a

$$(9)\qquad \rho_0 = \rho S\left(\pm \frac{\partial x}{\partial x_0}\frac{\partial y}{\partial y_0}\frac{\partial z}{\partial z_0}\right).$$

On voit ainsi que le déterminant $S\left(\pm \frac{\partial x}{\partial x_0}\frac{\partial y}{\partial y_0}\frac{\partial z}{\partial z_0}\right)$ ne peut pas être nul et qu'il se réduit à l'unité dans le cas d'un liquide.

La forme (9) donnée à l'équation de continuité, ainsi que les équations (5), avaient été obtenues par Lagrange.

Dans le cas actuel, les équations du mouvement d'un fluide se réduisent aux suivantes :

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{dp}{\rho} = dU - d\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2}d\left(\frac{\partial \varphi^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi^2}{\partial y^2} + \frac{\partial \varphi^2}{\partial z^2}\right) = dU - d\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2}dV^2.\\ &\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho \frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\partial x} + \frac{\partial \rho \frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\partial y} + \frac{\partial \rho \frac{\partial \varphi}{\partial z}}{\partial z} = 0, \end{aligned}\right.$$

en désignant par V la vitesse d'une molécule qui, à l'instant t, a pour coordonnées x, y, z.

72. *Mouvement permanent d'un liquide pesant contenu dans un vase dont la paroi est de révolution autour d'un axe vertical* Oz. — Nous avons, d'après le n° 225 du Tome II, en remarquant qu'ici $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ doit être remplacé par une constante,

$$(1)\qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0,$$

$$(2)\qquad \frac{p}{\rho} = gz + \text{const.} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi^2}{\partial r^2} + \frac{\partial \varphi^2}{\partial z^2}\right).$$

(¹) Soient

$$\begin{matrix} A_1, & B_1, & C_1, \\ A_2, & B_2, & C_2, \\ A_3, & B_3, & C_3 \end{matrix}$$

les projections des arêtes d'un parallélépipède quelconque sur Ox, Oy, Oz. Le volume de ce parallélépipède a pour expression

$$A_1B_2C_3 - A_1B_3C_2 + A_2B_3C_1 - A_2B_1C_3 + A_3B_1C_2 - A_3B_2C_1 = S(\pm A_1B_2C_3).$$

L'écoulement est censé avoir lieu par un orifice horizontal résultant d'une troncature au sommet du vase.

La condition relative à la paroi est

$$(3) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial z} dr - \frac{\partial \varphi}{\partial r} dz = 0.$$

Nous désignerons par p_0 la pression atmosphérique et respectivement par les indices 0 et 1 les quantités qui se rapportent au bord de la surface libre et à celui de l'orifice. Nous aurons, au lieu de l'équation (2), la suivante

$$\frac{p - p_0}{\rho} = g(z - z_0) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi^2}{\partial r^2} + \frac{\partial \varphi^2}{\partial z^2}\right)_0,$$

qui deviendra celle de la surface libre en y faisant $p = p_0$.

La condition relative à l'orifice sera

$$(4) \qquad g(z_1 - z_0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi^2}{\partial r^2} + \frac{\partial \varphi^2}{\partial z^2}\right)_0^1.$$

Si l'on représente par $z = f(r)$ l'équation de la surface, il faudrait pouvoir déterminer une fonction φ satisfaisant à l'équation (1) et à celle-ci :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \varphi}{\partial r} f'(r) = 0.$$

Comme cette recherche présente des difficultés qui paraissent insurmontables, nous allons, à l'inverse, nous proposer de chercher quelques formes de la fonction satisfaisant à (1) et qui rendent intégrable l'équation (3); l'intégrale sera l'équation de la paroi.

(a). La forme la plus simple de φ est

$$\varphi = -\frac{br^2}{4} + \left(a + \frac{bz}{2}\right) z,$$

a et b étant deux constantes. En désignant par A une autre constante, l'équation (3) nous donne, pour celle de la surface,

$$(a) \qquad r = \frac{A}{\sqrt{a + bz}}.$$

Nous avons, par suite,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{Ab}{2\sqrt{a + bz}} \qquad \text{pour} \quad z = z_0,\ z = z_1,$$

et l'équation (4) devient

$$g(z_1 - z_0) = \frac{1}{2}\left[\frac{A^2 b^2}{4}\left(\frac{1}{a+bz_1} - \frac{1}{a+bz_0}\right) + (a+bz_1)^2 - (a+bz_0)^2\right];$$

d'où

$$A = \frac{2}{b}\sqrt{\frac{[2ab + b^2(z_0+z_1) - 2g](a+bz_0)(a+bz_1)}{b}}.$$

On a donc, pour le volume du liquide débité par seconde,

$$Q = \pi r_1^2(a+bz_1) = \frac{4\pi}{b^3}[2ab + b^2(z_0+z_1) - 2g](a+bz_0)(a+bz_1).$$

(b). L'équation (3) pourra encore s'intégrer si $\frac{\partial\varphi}{\partial r}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$, par suite φ, sont des fonctions homogènes de r et z.

Nous poserons, en conséquence,

$$z = \zeta r; \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\partial\zeta}{\partial r} = -\frac{\zeta}{r}, \qquad \frac{\partial\zeta}{\partial z} = \frac{1}{r},$$

puis

$$\varphi = r^\alpha \psi(\zeta),$$

α étant un nombre nécessairement supérieur à l'unité pour que $\frac{\partial\varphi}{\partial r}$ s'annule avec r. En substituant dans l'équation (1), on trouve

$$(5) \qquad (1+\zeta^2)\frac{d^2\psi}{d\zeta^2} - (2\alpha - 1)\zeta\frac{d\psi}{d\zeta} + \alpha^2\psi = 0.$$

On a ensuite

$$(6) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{r^{\alpha-1}}\frac{\partial\varphi}{\partial r} &= \alpha\psi - \zeta\frac{d\psi}{d\zeta}, \\ \frac{1}{r^{\alpha-1}}\frac{\partial\varphi}{\partial z} &= \frac{d\psi}{d\zeta}, \end{aligned}\right.$$

et l'équation (3) devient

$$(3') \qquad \frac{\alpha\psi - \zeta\frac{d\psi}{d\zeta}}{\alpha\zeta\psi - (1+\zeta^2)\frac{d\psi}{d\zeta}}\,d\zeta = -\frac{dr}{r}.$$

Supposons qu'on ait pu obtenir une intégrale particulière ψ_1 de l'équation (5). En posant $\psi = U\psi_1$, on trouve faci-

lement, pour l'intégrale générale de cette équation,

$$(7)\qquad \psi = \left[A + B\int \frac{(1+\zeta^2)^{\frac{2\alpha-1}{2}}}{\psi_1^2}\,d\zeta\right]\psi_1,$$

A et B étant deux constantes arbitraires.

Pour essayer d'obtenir une intégrale, telle que ψ_1, cherchons à satisfaire à l'équation (5) par une suite de termes, telle que

$$\psi = \Sigma A_m \zeta^m.$$

dans laquelle m est un nombre entier positif. En substituant et identifiant, nous trouvons

$$(9)\qquad A_{m+2} = -\frac{(\alpha-m)^2}{(m+1)(m+2)}A_m.$$

Si nous supposons d'abord que m est un nombre pair $2n-2$, nous trouvons

$$(10)\qquad A_{2n} = (-1)^n \frac{[\alpha(\alpha-2)(\alpha-4)\ldots(\alpha-2n+2)]^2}{1.2.3\ldots 2n}A_0.$$

En faisant $m = 2n-1$, on obtient

$$(10')\qquad A_{2n+1} = (-1)^n \frac{[(\alpha-1)(\alpha-3)\ldots(\alpha-2n+1)]^2}{1.2.3\ldots(2n+1)}A_1.$$

On voit ainsi que ψ sera représenté par deux suites de termes dépendant chacune d'un coefficient arbitraire. Mais l'intégration de l'équation (3') ne pourra se faire que si ψ est composé d'un nombre fini de termes, et il faut alors que α soit un nombre entier. En effet, selon que α sera un nombre pair ou un nombre impair, on obtiendra une intégrale particulière ψ_1 de l'équation (5), composée d'un nombre fini de termes, en prenant $A_0 = 1$, $A_1 = 0$ ou $A_0 = 0$, $A_1 = 1$.

Supposons d'abord $\alpha = 2$, nous avons

$$\psi_1 = 1 - 2\zeta^2$$

et

$$\psi = \left[A + B\int \frac{(1+\zeta^2)^{\frac{3}{2}}}{(1-2\zeta^2)^2}\,d\zeta\right](1-2\zeta^2).$$

L'intégration peut s'effectuer en posant $\zeta = \tang\theta$; mais,

comme elle introduit des logarithmes, l'équation (3') ne pourra faire connaître r que par une quadrature.

En prenant $\alpha = 3$, on a

$$\psi = \left[A + B \int \frac{(1+\zeta^2)^2 \sqrt{1+\zeta^2}}{\zeta^2 (1 - \frac{2}{3}\zeta^2)^2} d\zeta \right] (1 - \tfrac{2}{3}\zeta^2)\zeta.$$

L'intégration peut encore s'effectuer par la même méthode que ci-dessus; mais on arrive à un résultat encore plus compliqué. Si l'on prend $B = 0$ et si l'on désigne par C une constante, on trouve

$$\frac{z^2}{r^2} = \frac{1}{4} + \frac{C}{r^4},$$

équation que nous ne nous arrêterons pas à discuter.

73. *Équations du mouvement d'un liquide en coordonnées curvilignes orthogonales.*

(a) Rappelons d'abord, principalement en vue de les compléter, les formules du titre (a) du n° 32, en supprimant la distinction entre les caractéristiques δ et ∂, distinction qui ne pouvait être utile qu'en entrant en matière :

$$(a) \qquad \rho_i = f_i(x, y, z),$$

$$(b) \qquad h_i = \sqrt{\frac{\partial \rho_i^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \rho_i^2}{\partial y^2} + \frac{\partial \rho_i^2}{\partial z^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\partial x^2}{\partial \rho_i^2} + \frac{\partial y^2}{\partial \rho_i^2} + \frac{\partial z^2}{\partial \rho_i^2}}},$$

$$(c) \qquad dn_i = \frac{d\rho_i}{h_i},$$

$$(d) \qquad \frac{\partial \rho_i}{\partial x}\frac{\partial \rho_j}{\partial x} + \frac{\partial \rho_i}{\partial y}\frac{\partial \rho_j}{\partial y} + \frac{\partial \rho_i}{\partial z}\frac{\partial \rho_j}{\partial z} = 0,$$

$$(e) \qquad \frac{1}{h_i}\frac{\partial \rho_i}{\partial x} = h_i \frac{\partial x}{\partial \rho_i} \, [= \cos(N_i, x)] \ldots,$$

$$(f) \qquad \frac{\partial x}{\partial \rho_i}\frac{\partial x}{\partial \rho_j} + \frac{\partial y}{\partial \rho_i}\frac{\partial y}{\partial \rho_j} + \frac{\partial z}{\partial \rho_i}\frac{\partial z}{\partial \rho_j} = 0.$$

En ajoutant les équations (e), respectivement multipliées

par dx, dy, dz, on trouve

$$(g)\qquad \frac{d\rho_i}{h_i^2} = \frac{\partial x}{\partial \rho_i}\,dx + \frac{\partial y}{\partial \rho_i}\,dy + \frac{\partial z}{\partial \rho_i}\,dz.$$

Proposons-nous maintenant de trouver l'expression de

$$(h)\qquad \Delta_2 \rho = \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2}$$

en fonction des dérivées partielles de x, y, z par rapport à ρ, ρ_1, ρ_2.

De la relation connue

$$\cos(N, x) = \cos(N_1, z)\cos(N_2, y) - \cos(N_1, y)\cos(N_2, z),$$

on déduit

$$\frac{1}{h}\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{1}{h_1 h_2}\left(\frac{\partial \rho_1}{\partial z}\frac{\partial \rho_2}{\partial y} - \frac{\partial \rho_1}{\partial y}\frac{\partial \rho_2}{\partial z}\right)$$

et, en posant

$$\lambda = \frac{h}{h_1 h_2},$$

il vient

$$(i)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial x} &= \lambda\left(\frac{\partial \rho_1}{\partial z}\frac{\partial \rho_2}{\partial y} - \frac{\partial \rho_1}{\partial y}\frac{\partial \rho_2}{\partial z}\right) \qquad \text{et, de même,}\\ \frac{\partial \rho}{\partial y} &= \lambda\left(\frac{\partial \rho_1}{\partial x}\frac{\partial \rho_2}{\partial z} - \frac{\partial \rho_1}{\partial z}\frac{\partial \rho_2}{\partial x}\right),\\ \frac{\partial \rho}{\partial z} &= \lambda\left(\frac{\partial \rho_1}{\partial y}\frac{\partial \rho_2}{\partial x} - \frac{\partial \rho_1}{\partial x}\frac{\partial \rho_2}{\partial y}\right). \end{aligned}\right.$$

Si l'on ajoute les équations (i), après les avoir différentiées respectivement par rapport à x, y, z, on trouve

$$\Delta_2 \rho = \frac{\partial \lambda}{\partial x}\left(\frac{\partial \rho_1}{\partial z}\frac{\partial \rho_2}{\partial y} - \frac{\partial \rho_1}{\partial y}\frac{\partial \rho_2}{\partial z}\right) + \frac{\partial \lambda}{\partial y}\left(\frac{\partial \rho_1}{\partial x}\frac{\partial \rho_2}{\partial z} - \frac{\partial \rho_1}{\partial z}\frac{\partial \rho_2}{\partial x}\right)$$
$$+ \frac{\partial \lambda}{\partial z}\left(\frac{\partial \rho_1}{\partial y}\frac{\partial \rho_2}{\partial x} - \frac{\partial \rho_1}{\partial x}\frac{\partial \rho_2}{\partial y}\right).$$

Mais on a

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \frac{\partial \lambda}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \lambda}{\partial \rho_1}\frac{\partial \rho_1}{\partial x} + \frac{\partial \lambda}{\partial \rho_2}\frac{\partial \rho_2}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial y} = \ldots, \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial z} = \ldots;$$

par suite,

$$\Delta_2\rho = \frac{\partial\lambda}{\partial\rho}\left[\frac{\partial\rho}{\partial x}\left(\frac{\partial\rho_1}{\partial z}\frac{\partial\rho_2}{\partial y} - \frac{\partial\rho_1}{\partial y}\frac{\partial\rho_2}{\partial z}\right) + \frac{\partial\rho}{\partial y}(\ldots) + \frac{\partial\rho}{\partial z}(\ldots)\right],$$

ou, en vertu des relations (i),

$$\Delta_2\rho = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial\rho}\left[\frac{\partial\rho^2}{\partial x^2} + \frac{\partial\rho^2}{\partial y^2} + \frac{\partial\rho^2}{\partial z^2}\right] = \frac{h^2}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial\rho}.$$

On a donc

$$(j)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta_2\rho &= hh_1h_2\frac{\partial\dfrac{h}{h_1h_2}}{\partial\rho} \\ \Delta_2\rho_1 &= hh_1h_2\frac{\partial\dfrac{h_1}{hh_2}}{\partial\rho_1}, \\ \Delta_2\rho_2 &= hh_1h_2\frac{\partial\dfrac{h_2}{hh_1}}{\partial\rho_2}. \end{aligned}\right. \qquad \text{et, de même,}$$

En désignant par φ une fonction quelconque de x, y, z, posons

$$\Delta_1\varphi = \sqrt{\frac{\partial\varphi^2}{\partial x^2} + \frac{\partial\varphi^2}{\partial y^2} + \frac{\partial\varphi^2}{\partial z^2}},$$

$$\Delta_2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}.$$

Nous ferons d'abord remarquer que les valeurs de $\Delta_1\varphi$, $\Delta_2\varphi$ conservent respectivement la même forme lorsqu'on substitue au système de coordonnées (x, y, z) un autre système rectangulaire (x', y', z') [1].

---

[1] Des relations telles que

$$x' = x\cos(x, x') + y\cos(y, x') + z\cos(z, x')$$

on tire

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = \cos(x, x'), \qquad \frac{\partial y'}{\partial x} = \cos(x, y'), \qquad \frac{\partial z'}{\partial x} = \cos(x, z'),$$

et l'on a, par suite,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial x'}\cos(x, x') + \frac{\partial\varphi}{\partial y'}\cos(x, y') + \frac{\partial\varphi}{\partial z'}\cos(x, z'),$$

Nous avons

$$(k)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial \rho}\dfrac{\partial \rho}{\partial x} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial \rho_1}\dfrac{\partial \rho_1}{\partial x} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial \rho_2}\dfrac{\partial \rho_2}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = \ldots, \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} = \ldots, \end{cases}$$

d'où, en ayant égard aux relations (d),

$$(l)\qquad \Delta_1^2 \varphi = h^2 \frac{\partial \varphi^2}{\partial \rho^2} + h_1^2 \frac{\partial \varphi^2}{\partial \rho_1^2} + h_2^2 \frac{\partial \varphi^2}{\partial \rho_2^2}.$$

On déduit de la première des équations (k)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2}\frac{\partial \rho^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho_1^2}\frac{\partial \rho_1^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho_2^2}\frac{\partial \rho_2^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial \rho_1}\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial \rho_2}\frac{\partial^2 \rho_2}{\partial x^2}$$
$$+ 2\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho\,\partial \rho_1}\frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{\partial \rho_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho\,\partial \rho_2}\frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{\partial \rho_2}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho_1\,\partial \rho_2}\frac{\partial \rho_1}{\partial x}\frac{\partial \rho_2}{\partial x}\right).$$

---

et de même

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x'}\cos(y, x') + \frac{\partial \varphi}{\partial y'}\cos(y, y') + \frac{\partial \varphi}{\partial z'}\cos(y, z'),$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial x'}\cos(z, x') + \frac{\partial \varphi}{\partial y'}\cos(z, y') + \frac{\partial \varphi}{\partial z'}\cos(z, z'),$$

d'où

$$\frac{\partial \varphi^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi^2}{\partial y^2} + \frac{\partial \varphi^2}{\partial z^2} = \frac{\partial \varphi^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial \varphi^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial \varphi^2}{\partial z'^2}.$$

Nous avons maintenant

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x'^2}\cos^2(x, x') + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y'^2}\cos^2(x, y') + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z'^2}\cos^2(x, z')$$
$$+ 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x'\,\partial y'}\cos(x, x')\cos(x, y')$$
$$+ 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y'\,\partial z'}\cos(x, y')\cos(x, z') + 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z'\,\partial x'}\cos(x, z')\cos(x, x'),$$
$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \ldots,$$
$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \ldots;$$

par suite,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z'^2}.$$

En ajoutant cette équation à celles qui s'en déduisent, lorsqu'on y remplace successivement x par y et z, on trouve

$$\begin{aligned}\Delta_2\varphi = h^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho^2} + h_1^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho_1^2} + h_2^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho_2^2} + \frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\Delta_2\rho + \frac{\partial\varphi}{\partial\rho_1}\Delta_2\rho_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial\rho_2}\Delta_2\rho_2 \\ + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho\,\partial\rho_1}\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial\rho_1}{\partial x} + \frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial\rho_1}{\partial y} + \frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{\partial\rho_1}{\partial z}\right) \\ + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho\,\partial\rho_2}\left(\cdots\right) + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho_1\,\partial\rho_2}\left(\cdots\right),\end{aligned}$$

ou, en vertu des formules (d) et (j),

$$\begin{aligned}\Delta_2\varphi &= h^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho^2} + h_1^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho_1^2} + h_2^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho_2^2} \\ &\quad + hh_1h_2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\frac{\partial\dfrac{h}{h_1h_2}}{\partial\rho} + \frac{\partial\varphi}{\partial\rho_1}\frac{\partial\dfrac{h_1}{hh_2}}{\partial\rho_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial\rho_2}\frac{\partial\dfrac{h_2}{hh_1}}{\partial\rho_2}\right) \\ &= hh_1h_2\left(\frac{h}{h_1h_2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho^2} + \frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\frac{\partial\dfrac{h}{h_1h_2}}{\partial\rho} + \ldots\right),\end{aligned}$$

et enfin

$$(m)\qquad \Delta_2\varphi = hh_1h_2\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{h}{h_1h_2}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} + \frac{\partial}{\partial\rho_1}\frac{h_1}{hh_2}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_1} + \frac{\partial}{\partial\rho_2}\frac{h_2}{hh_1}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_2}\right).$$

En ayant égard aux relations (e), on a

$$\frac{\partial\rho_i}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\rho_i}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\rho_i}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial z} = h_i^2\left(\frac{\partial x}{\partial\rho_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial\rho_i}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial\rho_i}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$$

ou

$$(n)\qquad \frac{\partial\rho_i}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\rho_i}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\rho_i}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial z} = h_i^2\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_i}.$$

(b) Arrivons maintenant au mouvement d'un liquide. Si l'on a égard aux valeurs (l) et (m), et si l'on désigne par D, au lieu de ρ, la densité du liquide pour éviter toute confusion, les équations (10) du n° 72 deviennent

$$(p)\qquad \left\{\begin{aligned}\frac{p}{D} &= U - \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{1}{2}\left(h^2\frac{\partial\varphi^2}{\partial\rho^2} + h_1^2\frac{\partial\varphi^2}{\partial\rho_1^2} + h_2^2\frac{\partial\varphi^2}{\partial\rho_2^2}\right), \\ \frac{\partial}{\partial\rho}\frac{h}{h_1h_2}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} &+ \frac{\partial}{\partial\rho_1}\frac{h_1}{hh_2}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_1} + \frac{\partial}{\partial\rho_1}\frac{h}{hh_2}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_2} = 0,\end{aligned}\right.$$

en comprenant dans φ une fonction arbitraire du temps.

74. *Mouvement d'un solide pesant dans un liquide pesant.*

(*a*) L'expérience nous apprend que, lorsqu'un solide est animé d'un mouvement de translation dans un liquide, les vitesses des particules fluides deviennent insensibles au delà d'une zone cylindrique dont la section ne dépasse pas le quintuple de la section maximum du corps, normale à la direction de la vitesse. Il suit de là que, si le solide reste à une distance suffisante des limites du liquide, comme nous le supposerons, la masse fluide pourra être considérée comme indéfinie en tous sens.

Nous prendrons égale à l'unité la densité du liquide, et nous désignerons par M la masse du solide.

Le liquide est censé avoir été au repos lorsque le corps a reçu son mouvement initial.

Soient

$C\chi$, $C\eta$, $C\zeta$ trois axes rectangulaires fixes dont le troisième est dirigé dans le sens de la pesanteur;

A, B, C les moments d'inertie du corps par rapport aux axes principaux Ox, Oy, Oz relatifs à son centre de gravité O;

v, ψ la vitesse et l'accélération de ce centre;

n la rotation instantanée du corps autour du même centre;

p_0 la pression sur la surface du corps représentée par $\rho_0 = \mathcal{F}(x, y, z)$;

P la résultante des pressions élémentaires $p_0\, d\omega$;

$\mathfrak{M}$ le moment de ces pressions par rapport au point O.

Comme $\Delta_1\varphi$, $\Delta_2\varphi$ conservent la même forme lorsque les axes coordonnés changent de position, les équations du mouvement du liquide peuvent s'écrire ainsi :

$$(1)\qquad \begin{cases} p = g\zeta - \dfrac{\partial\varphi}{\partial t} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial\varphi^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial\varphi^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial\varphi^2}{\partial z^2}\right), \\ \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0. \end{cases}$$

Les composantes, suivant Ox, des vitesses absolue et relative de la molécule liquide (x, y, z) étant respectivement

$\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{dx}{dt}$, nous avons

$$(2)\quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} - v_x + n_z y - n_y z \\ \text{et, de même,} \\ \frac{dy}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial y} - v_y + n_x z - n_z x, \\ \frac{dz}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial z} - v_z + n_y x - n_x y. \end{cases}$$

Dans le système de coordonnées curvilignes orthogonales

$$\rho = \mathcal{F}(x, y, z), \qquad \rho_1 = \mathcal{F}_1(x, y, z), \qquad \rho_2 = \mathcal{F}_2(x, y, z),$$

les équations (1) deviennent

$$(3)\quad \begin{cases} p = g\zeta - \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{1}{2}\left(h^2\frac{\partial\varphi^2}{\partial\rho^2} + h_1^2\frac{\partial\varphi^2}{\partial\rho_1^2} + h_2^2\frac{\partial\varphi^2}{\partial\rho_2^2}\right), \\ \frac{\partial}{\partial\rho}\frac{h}{h_1h_2}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} + \frac{\partial}{\partial\rho_1}\frac{h_1}{h_2h}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_1} + \frac{\partial}{\partial\rho_2}\frac{h_2}{hh_1}\frac{\partial\varphi}{\partial^2\rho} = 0. \end{cases}$$

La formule (g) du numéro précédent nous donne

$$(4)\quad \frac{1}{h_i^2}\frac{d\rho_i}{dt} = \frac{\partial x}{\partial\rho_i}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial y}{\partial\rho_i}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial z}{\partial\rho_i}\frac{dz}{dt}$$

ou encore

$$(4')\quad \frac{1}{h_i^2}\frac{d\rho_i}{dt} = \frac{1}{h_i^2}\left(\frac{\partial\rho_i}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \ldots\right) = \frac{1}{h_i^2}\left(\frac{\partial\rho_i}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \ldots\right).$$

On voit, d'après cette dernière forme, que $\frac{1}{h_i}\frac{d\rho_i}{dt}$ représente la composante normale à la surface ρ_i de la vitesse relative de la molécule (x, y, z).

On déduit de la formule (4), en ayant égard aux valeurs (2),

$$(5)\quad \begin{cases} \frac{1}{h^2}\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial\rho} - \left(v_x\frac{\partial x}{\partial\rho} + v_y\frac{\partial y}{\partial\rho} + v_z\frac{\partial z}{\partial\rho}\right) \\ \qquad + n_x\left(z\frac{\partial y}{\partial\rho} - y\frac{\partial z}{\partial\rho}\right) + n_y\left(x\frac{\partial z}{\partial\rho} - z\frac{\partial x}{\partial\rho}\right) + n_z\left(y\frac{\partial x}{\partial\rho} - x\frac{\partial y}{\partial\rho}\right), \\ \frac{1}{h_1^2}\frac{d\rho_1}{dt} = \ldots, \\ \frac{1}{h_2^2}\frac{d\rho_2}{dt} = \ldots. \end{cases}$$

Occupons-nous maintenant du mouvement du corps M. Si l'on remarque que l'accélération ψ du point O est la vitesse absolue de l'extrémité de la droite Ov qui représente la vitesse v, que la vitesse relative de ce point par rapport aux axes mobiles Ox, Oy, Oz est $\frac{dv_x}{dt}$, on a

$$\psi_x = \frac{dv_x}{dt} + n_y v_z - n_z v_y,$$

$$\psi_y = \frac{dv_y}{dt} + n_z v_x - n_x v_z,$$

$$\psi_z = \ldots,$$

et par suite, pour les équations du mouvement du centre de gravité O,

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} M\frac{dv_x}{dt} &= Mg\cos(\zeta, x) + M(n_z v_y - n_y v_z) + P_x, \\ M\frac{dv_y}{dt} &= \ldots, \\ M\frac{dv_z}{dt} &= \ldots. \end{aligned} \right.$$

On a ensuite, pour les équations du mouvement de rotation de M autour de ce centre,

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} A\frac{dn_x}{dt} + (C - B)n_y n_z &= \mathfrak{M}_x, \\ B\frac{dn_y}{dt} + &\ldots, \\ C\frac{dn_z}{dt} + &\ldots. \end{aligned} \right.$$

Nous avons

$$P_x = -\int p_0(N_0 x)\, d\omega;$$

si p_0 renferme un terme constant, il disparaîtra dans cette expression. Comme on peut prendre

$$d\omega = dn_1\, dn_2 = \frac{d\rho_1}{h_1}\,\frac{d\rho_2}{h_2}$$

et que

$$\cos(N_0, x) = h_0 \frac{\partial x}{\partial \rho_0},$$

il vient

$$(8) \qquad P_x = -\int \frac{p_0 h_0}{h_1 h_2} \frac{\partial x}{\partial \rho_0} d\rho_1 d\rho_2, \qquad P_y = \ldots, \qquad P_z = \ldots.$$

Dans les expressions

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{M}_x &= \int p_0 [z \cos(N_0, y) - y \cos(N_0, z)] \, d\omega \\ &= \int \frac{p_0 h_0}{h_1 h_2} \left(z \frac{\partial y}{\partial \rho} - y \frac{\partial z}{\partial \rho} \right) d\rho_1 d\rho_2, \\ \mathfrak{M}_y &= \ldots, \\ \mathfrak{M}_z &= \ldots, \end{aligned} \right.$$

le terme de p_0 qui dépend du poids du fluide déplacé disparaît.

Comme on admet que toute molécule fluide en contact avec le corps glisse sur sa surface, on a, vu ce qui précède,

$$\left(\frac{1}{h} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{\rho = \rho_0} = 0$$

ou, en vertu de la première des équations (5),

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} &\left[\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} - \left(v_x \frac{\partial x}{\partial \rho} + v_y \frac{\partial y}{\partial \rho} + v_z \frac{\partial z}{\partial \rho} \right) \right. \\ &\quad \left. + n_x \left(z \frac{\partial y}{\partial \rho} - y \frac{\partial z}{\partial \rho} \right) + n_y \left(x \frac{\partial z}{\partial \rho} - z \frac{\partial x}{\partial \rho} \right) + n_z \left(y \frac{\partial x}{\partial \rho} - x \frac{\partial y}{\partial \rho} \right) \right]_{\rho = \rho_0} = 0. \end{aligned} \right.$$

Par hypothèse, le mouvement du liquide n'est produit que par celui du corps, et, par suite, la vitesse absolue de ses molécules est nulle pour $\rho = \infty$, d'où

$$(11) \qquad \left(h_i \frac{\partial \varphi}{\partial \rho_i} \right)_{\rho = \infty} = 0.$$

Nous allons chercher à satisfaire aux conditions du problème en écrivant

$$(12) \quad \varphi = \mathcal{E} + \mathcal{A}_x v_x + \mathcal{A}_y v_y + \mathcal{A}_z v_z + \mathcal{N}_x n_x + \mathcal{N}_y n_y + \mathcal{N}_z n_z,$$

expression dans laquelle $\mathcal{E}$ ne dépend que du temps, et les $\mathcal{A}$, $\mathcal{N}$ que des ρ_i.

Ces dernières fonctions, substituées à φ, devront satisfaire à la seconde des équations (3).

La condition (10) sera remplacée par les suivantes :

$$(13)\quad \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial \mathcal{A}_x}{\partial \rho} = \dfrac{\partial x}{\partial \rho}, & \dfrac{\partial \mathcal{N}_x}{\partial \rho} = y\dfrac{\partial z}{\partial \rho} - z\dfrac{\partial y}{\partial \rho} \\ \dfrac{\partial \mathcal{A}_y}{\partial \rho} = \ldots, & \dfrac{\partial \mathcal{N}_y}{\partial \rho} = \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial \mathcal{A}_z}{\partial \rho} = \ldots, & \dfrac{\partial \mathcal{N}_z}{\partial \rho} = \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \text{pour } \rho = \rho_0.$$

Si l'on introduit l'expression (12) dans la première des équations (3) pour en déduire la valeur de p_0, que l'on portera ensuite dans la formule (8), on reconnaît que

$$(14)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{P}_x = -g\displaystyle\int \zeta \cos(\mathrm{N}_0, x)\, d\omega \\ \qquad + \text{une fonction linéaire des } \dfrac{dv_x}{dt} \ldots \dfrac{dn_x}{dt} \ldots, \\ \qquad + \text{une fonction homogène du second degré de } v_x \ldots n_x \ldots. \end{array}\right.$$

Le premier terme de P_x est relatif à la perte du poids dans le liquide comme à l'état de repos.

(*b*) *Cas où la surface du corps est symétrique par rapport à* Ox, Oy, Oz. C'est le seul que nous considérerons dans ce qui suit.

La fonction ρ de x, y, z conserve la même valeur et le même signe quand on change le signe de l'une quelconque des coordonnées de x, y, z ou, si l'on veut, ρ est une fonction paire de ces coordonnées ; mais $\dfrac{\partial \rho}{\partial x}$, par exemple, changera de signe avec x, en conservant la même valeur absolue. Les deux premières des conditions (13), en ayant égard aux formules (*e*) du numéro précédent, peuvent se mettre sous la forme

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial \mathcal{A}_x}{\partial x}\dfrac{\partial \rho}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathcal{A}_x}{\partial y}\dfrac{\partial \rho}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathcal{A}_x}{\partial z}\dfrac{\partial \rho}{\partial z} = \dfrac{\partial \rho}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \mathcal{N}_x}{\partial x}\dfrac{\partial \rho}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathcal{N}_x}{\partial y}\dfrac{\partial \rho}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathcal{N}_x}{\partial z}\dfrac{\partial \rho}{\partial z} = y\dfrac{\partial \rho}{\partial z} - z\dfrac{\partial \rho}{\partial y} \end{array}\right\} \text{pour } \rho = \rho_0.$$

et, d'après ce que l'on vient de dire, on est conduit à poser

$$\mathcal{A}_x = x\mathrm{D}_x, \qquad \mathcal{N}_x = yz\mathrm{E}_x,$$

en désignant par D_x, E_x des fonctions paires de coordonnées rectilignes. On aura des expressions semblables pour les autres $\mathcal{A}$, $\mathcal{N}$.

Nous écrirons, en conséquence,

$$(15)\quad \varphi = \mathcal{E} + x\mathrm{D}_x v_x + y\mathrm{D}_y v_y + z\mathrm{D}_z v_z + yz\mathrm{E}_x n_x + zx\mathrm{E}_y n_y + xy\mathrm{E}_z n_z.$$

On déterminera p_0 en substituant cette valeur dans la première des formules (1).

Nous avons trouvé

$$\mathrm{P}_x = -\int p_0 \cos(\mathrm{N}_0 x)\, d\omega;$$

mais, comme $\cos(\mathrm{N}_0, x)$ change de signe avec x, tous les termes pairs en x, contenus dans p_0, disparaîtront dans l'intégrale; il en sera de même des termes impairs en y, z, de sorte qu'il suffit de faire dans P_x

$$(a)\quad -p_0 = -g\zeta + x\mathrm{D}_x \frac{dv_x}{dt} + x\frac{\partial}{\partial y} y\mathrm{D}_y \frac{\partial}{\partial y} y\mathrm{E}_z . v_y n_z + x\frac{\partial}{\partial z} z\mathrm{D}_z \frac{\partial}{\partial z} z\mathrm{E}_y . v_z n_y.$$

Nous avons maintenant

$$\mathcal{M}_x = \int p_0 z \cos(\mathrm{N}_0 y)\, d\omega - \int p_0 y \cos(\mathrm{N}_0 z)\, d\omega.$$

Dans la première intégrale on ne devra conserver que les termes de p_0 impairs en y, et seulement ceux d'entre eux qui sont impairs en z, en raison du facteur z dont ils doivent être affectés; parmi ces derniers on ne devra choisir que ceux qui sont pairs en x. Le même raisonnement s'appliquant à la seconde intégrale, il suffit de faire dans $\mathcal{M}_x$

$$(b)\quad -p_0 = yz\left[\mathrm{E}_x \frac{dn_x}{dt} + \frac{\partial \mathrm{D}_y}{\partial x}\frac{\partial \mathrm{D}_z}{\partial x} v_y v_z + \frac{\partial x\mathrm{E}_y}{\partial x}\frac{\partial x\mathrm{E}_z}{\partial x} n_y n_z\right].$$

Si l'on porte respectivement les valeurs (a) et (b) dans les

formules (8) et (9), on trouve, en désignant par M′ la masse du liquide déplacé par le corps,

$$(8') \qquad P_x = m_x \frac{dv_x}{dt} + \alpha_x v_y n_z + \alpha'_x v_z u_y - M' g \cos(\zeta, x),$$

$$(9') \qquad \mathfrak{M}_x = i_x \frac{du_x}{dt} + \beta_x v_y v_z + \gamma_x u_z u_y,$$

en posant [1]

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned}
m_x &= \int \frac{h_0}{h_1 h_2} \frac{\partial x}{\partial \rho_0} x D_x \, d\rho_1 \, d\rho_2 = \int x D_x \, dy \, dz, \\
\alpha_x &= \int \frac{h_0}{h_1 h_2} \frac{\partial x}{\partial \rho_0} x \frac{\partial y D_y}{\partial y} \frac{\partial y E_z}{\partial y} d\rho_1 \, d\rho_2 \\
&= \int x \frac{\partial y D_y}{\partial y} \frac{\partial y E_z}{\partial y} dy \, dz, \\
\alpha'_x &= \int \frac{h_0}{h_1 h_2} \frac{\partial x}{\partial \rho_0} x \frac{\partial z D_z}{\partial z} \frac{\partial z E_y}{\partial z} d\rho_1 \, d\rho_2 \\
&= \int x \frac{\partial z D_y}{\partial z} \frac{\partial z E_y}{\partial z} dy \, dz, \\
i_x &= \int \frac{h_0}{h_1 h_2} yz E_x \left(y \frac{\partial z}{\partial \rho} - z \frac{\partial y}{\partial \rho} \right) d\rho_1 \, d\rho_2 \\
&= \int yz E_x (y \, dy - z \, dz) \, dx, \\
\beta_x &= \int \frac{h_0}{h_1 h_2} yz \frac{\partial D_y}{\partial x} \frac{\partial D_z}{\partial x} \left(y \frac{\partial z}{\partial \rho} - z \frac{\partial y}{\partial \rho} \right) d\rho_1 \, d\rho_2 \\
&= \int yz \frac{\partial D_y}{\partial x} \frac{\partial D_z}{\partial x} (y \, dy - z \, dz) \, dx, \\
\gamma_x &= \int \frac{h_0}{h_1 h_2} yz \frac{\partial x E_y}{\partial x} \frac{\partial x E_z}{\partial x} \left(y \frac{\partial z}{\partial \rho} - z \frac{\partial y}{\partial \rho} \right) d\rho_1 \, d\rho_2 \\
&= \int yz \frac{\partial x E_y}{\partial x} \frac{\partial x E_z}{\partial x} (y \, dy - z \, dz) \, dx.
\end{aligned} \right.$$

---

[1] Il ne faut pas perdre de vue que l'on a

$$\frac{h_0}{h_1 h_2} \frac{\partial x}{\partial \rho} d\rho_1 \, d\rho_2 = d\omega \cos(N_0 x) = dy \, dz,$$

$$\frac{h_0}{h_1 h_2} \frac{\partial y}{\partial \rho} d\rho_1 \, d\rho_2 = dx \, dz \ldots.$$

Nous avons donc pour les équations du mouvement du corps

$$(17)\quad \begin{cases} (M - m_x)\dfrac{dv_x}{dt} = (M - M')g\cos(\zeta, x) \\ \qquad\qquad + (M + \alpha_x)v_y n_z - (M - \alpha'_x)v_z n_y, \\ (M - m_y)\dfrac{dv_y}{dt} = \ldots. \\ (M - m_z)\dfrac{dv_z}{dt} = \ldots, \end{cases}$$

$$(18)\quad \begin{cases} (A - i_x)\dfrac{dn_x}{dt} + (C - B - \gamma_x)n_y n_z = \beta_x v_y v_z, \\ (B - i_y)\dfrac{dn_y}{dt} + \ldots, \\ (C - i_z)\dfrac{dn_z}{dt} + \ldots. \end{cases}$$

Les constantes m, i sont de véritables corrections, résultant de l'influence du liquide, apportées à la masse du corps dans son mouvement de translation parallèle à Ox et à son moment d'inertie autour de cet axe.

Quoique les équations (17) et (18) donnent par l'intégration la loi du mouvement du corps, le problème n'est pas cependant résolu, puisque la détermination des constantes est subordonnée à celle des fonctions xD_x, yzE_x, ... qui doivent satisfaire à la seconde des équations (3) ainsi qu'aux conditions (13) et (11), fonctions que nous déterminerons plus loin dans le cas où le corps est un ellipsoïde.

(*c*) *Hypothèse d'une translation.* — Concevons que le corps soit soumis à l'action d'un couple qui détruise à chaque instant le couple résultant des pressions élémentaires. Le corps sera animé d'un mouvement de translation, et l'on n'aura à considérer que les équations (17) dans lesquelles on fera $n = 0$ et qui deviennent

$$(17')\quad \begin{cases} (M - m_x)\dfrac{dv_x}{dt} = (M - M')g\cos(\zeta, x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \end{cases}$$

On voit ainsi qu'en dehors de la perte de poids résultant du

principe d'Archimède, l'influence du fluide ne se traduirait que par des corrections à introduire dans la masse du corps, ce qui n'est d'accord avec l'expérience que pour un mouvement lent de M; autrement l'influence ci-dessus se traduit par l'équivalent d'une force proportionnelle au carré de la vitesse v. On peut expliquer *a priori* la différence entre ces deux résultats. L'Hydrodynamique est essentiellement basée sur la continuité et ne peut conduire à un résultat exact que pour un mouvement lent de M; mais, lorsque ce mouvement est plus prononcé, il se produit, dans la région environnante du corps, des changements brusques de vitesse des particules fluides, que l'on ne peut faire entrer en ligne de compte qu'en Hydraulique.

(*d*) *Hypothèse d'un mouvement de rotation du corps autour d'un axe fixe auquel* Ox *reste parallèle.* — Soient

l la distance du centre de gravité O à l'axe fixe;
δ l'angle constant qu'elle forme avec Oy;
ϖ la réaction normale de l'axe fixe sur le corps.

On a

$$n_y = n_z = 0, \quad n_x = n, \quad v_x = 0, \quad v_y = -nl\sin\delta, \quad v_z = nl\cos\delta.$$

La deuxième et la troisième des équations (17), et la première des équations (18), qui sont les seules équations que l'on ait à considérer, deviennent

$$(M - m_y)\, l \sin\delta \frac{dn}{dt} = -(M - M')g\cos(\zeta, y) - (M + \alpha_y) l \cos\delta\, n^2 - \varpi_y,$$

$$(M - m_z)\, l \cos\delta \frac{dn}{dt} = \quad (M - M')g\cos(\zeta, z) + (M - \alpha'_z) l \sin\delta\, n^2 + \varpi_z,$$

$$(A - i_x)\frac{dn}{dt} = -\beta_x \sin\delta\cos\delta\, n^2 + (\varpi_y \sin\delta - \varpi_z \cos\delta)\, l.$$

Si l'on ajoute ces trois équations après avoir multiplié respectivement les deux premières par $l\sin\delta$, $l\cos\delta$, on trouve

$$(18') \left\{ \begin{aligned} &[A + Ml^2 - (m_y \sin^2\delta + m_z \cos^2\delta)\, l^2 - i_x]\frac{dn}{dt} \\ &\quad = (M - M')\, gl[\cos(\zeta, z)\cos\delta - \cos(\zeta, y)\sin\delta] - \frac{1}{2}(\alpha_y + \alpha'_z)\, l \sin 2\delta\, n^2. \end{aligned} \right.$$

On voit notamment que l'effet produit par le liquide sur le

corps serait l'équivalent de celui d'une force perpendiculaire au plan passant par le centre de gravité de M et l'axe de rotation, agissant à une distance constante de cet axe, représentée par la somme de deux termes dont l'un serait proportionnel à l'accélération angulaire, et l'autre au carré de la vitesse angulaire.

L'observation n'a constaté que l'existence du second terme; mais, d'après l'analyse précédente, ce terme serait nul pour $\delta = 0$, $\delta = 90°$, ce qui est contraire aux résultats de l'expérience.

(*e*) *Détermination des constantes qui entrent dans les équations du corps lorsque ce corps est un ellipsoïde homogène.* — Le système de coordonnées elliptiques

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{x^2}{\rho^2}+\frac{y^2}{\rho^2-b^2}+\frac{z^2}{\rho^2-c^2}=1,\\ &\frac{x^2}{\rho_1^2}+\frac{y^2}{\rho_1^2-b^2}-\frac{z^2}{c^2-\rho_1^2}=1,\\ &\frac{x^2}{\rho_2^2}-\frac{y^2}{b^2-\rho_2^2}-\frac{z^2}{c^2-\rho_2^2}=1 \end{aligned}\right.$$

suppose

$$\rho > c > b,\qquad \rho_1 > b < c,\qquad \rho_2 < b < c,\qquad \text{d'où}\qquad \rho > \rho_1 > \rho_2.$$

Nous avons trouvé au n° 32

$$(A)\qquad \left\{\begin{aligned} x^2 &= \frac{\rho^2\rho_1^2\rho_2^2}{b^2c^2},\\ y^2 &= \frac{(\rho^2-b^2)(\rho_1^2-b^2)(\rho_2^2-b^2)}{(b^2-c^2)b^2},\\ z^2 &= \frac{(\rho^2-c^2)(\rho_1^2-c^2)(\rho_2^2-c^2)}{(c^2-b^2)c^2}, \end{aligned}\right.$$

$$(B)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial x}{\partial\rho}=\frac{x}{\rho},\qquad \frac{\partial x}{\partial\rho_1}=\frac{x}{\rho_1},\qquad \frac{\partial x}{\partial\rho_2}=\frac{x}{\rho_2},\\ &\frac{\partial y}{\partial\rho}=\frac{\rho y}{\rho^2-b^2},\qquad \ldots,\\ &\frac{\partial z}{\partial\rho}=\frac{\rho z}{\rho^2-c^2},\qquad \ldots, \end{aligned}\right.$$

$$(C)\qquad h^2=\frac{(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}{(\rho^2-\rho_1^2)(\rho^2-\rho_2^2)},\qquad h_1^2=\ldots,\qquad h_2^2=\ldots.$$

On déduit des formules (C),

$$\frac{h}{h_1 h_2} = (\rho_1^2 - \rho_2^2)\sqrt{-\frac{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}{(\rho_1^2 - b^2)(\rho_1^2 - c^2)(\rho_2^2 - b^2)(\rho_2^2 - c^2)}},$$

$$\frac{h_1}{hh_2} = (\rho^2 - \rho_2^2)\sqrt{-\frac{(\rho_1^2 - b^2)(\rho_1^2 - c^2)}{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)(\rho_2^2 - b^2)(\rho_2^2 - c^2)}},$$

$$\frac{h_2}{hh_1} = (\rho^2 - \rho_1^2)\sqrt{-\frac{(\rho_2^2 - b^2)(\rho_2^2 - c^2)}{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)(\rho_1^2 - b^2)(\rho_2^2 - c^2)}},$$

Si l'on pose

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned} d\zeta &= \frac{d\rho}{\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}},\\ d\zeta_1 &= \frac{d\rho_1}{\sqrt{-(\rho_1^2 - b^2)(\rho_1^2 - c^2)}},\\ d\zeta_2 &= \frac{d\rho_2}{\sqrt{(\rho_2^2 - b^2)(\rho_2^2 - c^2)}},\end{aligned}\right.$$

la seconde des équations (3) devient

$$(21)\qquad (\rho_1^2 - \rho_2^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2} + (\rho^2 - \rho_2^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta_1^2} + (\rho^2 - \rho_1^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta_2^2} = 0.$$

Si l'on fait $\mathcal{A}_x = x\,\mathrm{D}_x, \ldots, \mathcal{N}_x = yz\,\mathrm{E}_x, \ldots$ dans les conditions (13), que l'on remplace ensuite $\frac{\partial x}{\partial\rho}, \ldots$ par leurs valeurs (B), ces conditions deviennent

$$(22)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \mathrm{D}_x}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}(\mathrm{D}_x - 1) = 0,\\ &\frac{\partial \mathrm{D}_y}{\partial\rho} + \frac{\rho}{\rho^2 - b^2}(\mathrm{D}_y - 1) = 0.\\ &\frac{\partial \mathrm{D}_z}{\partial\rho} + \frac{\rho}{\rho^2 - c^2}(\mathrm{D}_z - 1) = 0;\\ &\frac{\partial \mathrm{E}_x}{\partial\rho} + \frac{\rho}{\rho^2 - c^2}(\mathrm{E}_x - 1) + \frac{\rho}{\rho^2 - b^2}(\mathrm{E}_x + 1) = 0,\\ &\frac{\partial \mathrm{E}_y}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}(\mathrm{E}_y - 1) + \frac{\rho}{\rho^2 - c^2}(\mathrm{E}_y + 1) = 0,\\ &\frac{\partial \mathrm{E}_z}{\partial\rho} + \frac{\rho}{\rho^2 - b^2}(\mathrm{E}_z - 1) + \frac{1}{\rho}(\mathrm{E}_z + 1) = 0,\end{aligned}\right\}\ \text{pour } \rho = \rho_0.$$

Occupons-nous maintenant des conditions (11) relatives à $\rho = \infty$. Elles se décomposent dans les suivantes :

$$h\frac{\partial \mathcal{A}_x}{\partial \rho} = 0, \qquad h\frac{\partial \mathcal{A}_y}{\partial \rho} = 0, \qquad h\frac{\partial \mathcal{A}_z}{\partial \rho} = 0,$$

$$h_1\frac{\partial \mathcal{A}_x}{\partial \rho_1} = 0, \qquad \ldots,$$

$$h_2\frac{\partial \mathcal{A}_x}{\partial \rho_2} = 0, \qquad \ldots;$$

$$h\frac{\partial \mathcal{N}_x}{\partial \rho} = 0, \qquad \ldots,$$

$$h_1\frac{\partial \mathcal{N}_x}{\partial \rho_1} = 0, \qquad \ldots,$$

$$h_2\frac{\partial \mathcal{N}_x}{\partial \rho_2} = 0, \qquad \ldots.$$

Remplaçons maintenant les $\mathcal{A}$ et les $\mathcal{N}$ par leurs expressions en D et E, puis $\frac{\partial x}{\partial \rho}, \frac{\partial y}{\partial \rho}, \ldots$ par leurs valeurs (B); nous obtenons

$$h_i x\left(\frac{\partial D_x}{\partial \rho_i} + \frac{1}{\rho_i}D_x\right) = 0,$$

$$h_i y\left(\frac{\partial D_y}{\partial \rho_i} + D_y\frac{\rho_i}{\rho_i^2 - b^2}\right) = 0,$$

$$h_i z\left(\frac{\partial D_z}{\partial \rho_i} + D_z\frac{\rho_i}{\rho_i^2 - c^2}\right) = 0,$$

$$h_i yz\left[\frac{\partial E_x}{\partial \rho_i} + \left(\frac{1}{\rho_i^2 - c^2} + \frac{1}{\rho_i^2 - b^2}\right)\rho_i E_x\right] = 0,$$

$$h_i zx\left[\frac{\partial E_y}{\partial \rho_i} + \left(\frac{1}{\rho_i} + \frac{\rho_i}{\rho_i^2 - c^2}\right)E_y\right] = 0,$$

$$h_i xy\left[\frac{\partial E_z}{\partial \rho_i} + \left(\frac{1}{\rho_i} + \frac{\rho_i}{\rho_i^2 - b^2}\right)E_z\right] = 0,$$

Nous chercherons à satisfaire aux conditions du problème en supposant les D et E indépendants de ρ_1 et ρ_2.

Pour $\rho = \infty$, on a $h = 1$ et $h_1 x$, $h_1 y$, ... ont des valeurs finies. Pour une valeur extrêmement grande de ρ, les coordonnées x, y, z sont proportionnelles à ρ. Il suit de là que l'on doit avoir

$$\left.\begin{array}{lll} \rho\dfrac{dD_x}{d\rho} = 0, & \rho\dfrac{dD_y}{d\rho} = 0, & \rho\dfrac{dD_z}{d\rho} = 0 \\ D_x = 0, & D_y = 0, & D_z = 0 \\ \rho\dfrac{dE_x}{d\rho} = 0, & \rho\dfrac{dE_y}{d\rho} = 0, & \rho\dfrac{dE_z}{d\rho} = 0 \\ \rho E_x = 0, & \rho E_y = 0, & \rho E_z = 0 \end{array}\right\} \text{pour } \rho = \infty.$$

Mais, pour une très grande valeur de ρ, on a $d\zeta = \dfrac{d\rho}{\rho^2}$; les conditions précédentes deviennent, par suite,

$$(23)\quad \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{dD_x}{d\zeta} = 0, & \dfrac{1}{\rho}\dfrac{dD_y}{d\zeta} = 0, & \dfrac{1}{\rho}\dfrac{dD_z}{d\zeta} = 0 \\ D_x = 0, & D_y = 0, & D_z = 0 \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{dE_x}{d\zeta} = 0, & \dfrac{1}{\rho}\dfrac{dE_y}{d\zeta} = 0, & \dfrac{1}{\rho}\dfrac{dE_z}{d\zeta} = 0 \\ \rho E_x = 0, & \rho E_y = 0, & \rho E_z = 0 \end{array}\right\} \text{pour } \rho = \infty.$$

Les fonctions x, y, z, yz, zx, xy, substituées à φ, satisfont à l'équation

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0,$$

et, par suite, à l'équation (21), c'est-à-dire que l'on a

$$(\rho_1^2 - \rho_2^2)\frac{\partial^2 x}{\partial\zeta^2} + (\rho^2 - \rho_2^2)\frac{\partial^2 x}{\partial\zeta_1^2} + (\rho^2 - \rho_1^2)\frac{\partial^2 x}{\partial\zeta_2^2} = 0,$$

.....,

$$(\rho_1^2 - \rho_2^2)\frac{\partial^2 yz}{\partial\zeta^2} + (\rho^2 - \rho_2^2)\frac{\partial^2 yz}{\partial\zeta_1^2} + (\rho^2 - \rho_1^2)\frac{\partial^2 yz}{\partial\zeta_2^2} = 0,$$

.....

En ayant égard à ces relations, si l'on substitue à φ, dans

l'équation précitée, les fonctions $x\mathrm{D}_x$, $y\mathrm{D}_y$, $z\mathrm{D}_z$, $yz\mathrm{E}_x$, $zx\mathrm{E}_y$, $xy\mathrm{E}_z$, on trouve

$$\frac{d^2\mathrm{D}_x}{d\zeta^2}+\frac{2}{x}\frac{\partial x}{\partial\zeta}\frac{d\mathrm{D}_x}{d\zeta}=0,$$

$$\frac{d^2\mathrm{D}_y}{d\zeta^2}+\frac{2}{y}\frac{\partial y}{\partial\zeta}\frac{d\mathrm{D}_y}{d\zeta}=0,$$

$$\frac{d^2\mathrm{D}_z}{d\zeta^2}+\frac{2}{z}\frac{\partial z}{\partial\zeta}\frac{d\mathrm{D}z}{d\zeta}=0,$$

$$\frac{d^2\mathrm{E}_x}{d\zeta^2}+\frac{2}{yz}\frac{\partial yz}{\partial\zeta}\frac{d\mathrm{E}_x}{d\zeta}=0,$$

$$\frac{d^2\mathrm{E}_y}{d\zeta^2}+\frac{2}{zx}\frac{\partial zx}{\partial\zeta}\frac{d\mathrm{E}_y}{d\zeta}=0,$$

$$\frac{d^2\mathrm{E}_z}{d\zeta^2}+\frac{2}{xy}\frac{\partial xy}{\partial\zeta}\frac{d\mathrm{E}_z}{d\zeta}=0,$$

Or on peut écrire

$$x=\varepsilon_x\rho,\qquad y=\varepsilon_y\sqrt{\rho^2-b^2},\qquad z=\varepsilon_z\sqrt{\rho^2-c^2}.$$

les ε étant des fonctions de ρ_1, ρ_2; il vient donc

$$\frac{d^2\mathrm{D}_x}{d\zeta^2}+\frac{2}{\rho}\frac{d\rho}{d\zeta}\frac{d\mathrm{D}_x}{d\zeta}=0,$$

$$\frac{d^2\mathrm{D}_y}{d\zeta^2}+\frac{2}{\sqrt{\rho^2-b^2}}\frac{d\sqrt{\rho^2-b^2}}{d\zeta}\frac{d\mathrm{D}_y}{d\zeta}=0,$$

$$\frac{d^2\mathrm{D}_z}{d\zeta^2}+\frac{2}{\sqrt{\rho^2-c^2}}\frac{d\sqrt{\rho^2-c^2}}{d\zeta}\frac{d\mathrm{D}_z}{d\zeta}=0;$$

$$\frac{d^2\mathrm{E}x}{d\zeta^2}+\frac{2}{\sqrt{(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}}\frac{d\sqrt{(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}}{d\zeta}\frac{d\mathrm{E}_x}{d\zeta}=0,$$

$$\frac{d^2\mathrm{E}_y}{d\zeta^2}+\frac{2}{\rho\sqrt{\rho^2-c^2}}\frac{d\rho\sqrt{\rho^2-c^2}}{d\zeta}\frac{d\mathrm{E}_y}{d\zeta}=0,$$

$$\frac{d^2\mathrm{E}_z}{d\zeta^2}+\frac{2}{\rho\sqrt{\rho^2-b^2}}\frac{d\rho\sqrt{\rho^2-b^2}}{d\zeta}\frac{d\mathrm{E}_z}{d\zeta}=0;$$

d'où, en désignant par H_x, ..., K_x, ... des constantes arbi-

traires,

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{dD_x}{d\zeta} &= \frac{H_x}{\rho^2},\\
\frac{dD_y}{d\zeta} &= \frac{H_y}{\rho^2-b^2},\\
\frac{dD_z}{d\zeta} &= \frac{H_z}{\rho^2-c^2};\\
\frac{dE_x}{d\zeta} &= \frac{K_x}{(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)},\\
\frac{dE_y}{d\zeta} &= \frac{K_y}{\rho^2(\rho^2-c^2)},\\
\frac{dE_z}{d\zeta} &= \frac{K_z}{\rho^2(\rho^2-b^2)}.
\end{aligned}\right.$$

Nous voyons déjà que celles des conditions (23) qui renferment des dérivées sont satisfaites. Nous prendrons maintenant

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned}
D_x &= -H_x\int_\rho^\infty \frac{d\zeta}{\rho^2},\\
D_y &= -H_y\int_\rho^\infty \frac{d\zeta}{\rho^2-b^2},\\
D_z &= -H_z\int_\rho^\infty \frac{d\zeta}{\rho^2-c^2},\\
E_x &= -K_x\int_\rho^\infty \frac{d\zeta}{(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)},\\
E_y &= -K_y\int_\rho^\infty \frac{d\zeta}{\rho^2(\rho^2-c^2)},\\
E_z &= -K_z\int_\rho^\infty \frac{d\zeta}{\rho^2(\rho^2-b^2)}.
\end{aligned}\right.$$

Celles des conditions (23) qui se rapportent aux D sont évidemment remplies. Il en est de même de celles qui sont relatives aux E; car nous avons, par exemple,

$$\rho E_x = K_x \frac{1}{\frac{1}{\rho}}\int_\infty^\rho \frac{d\rho}{(\rho^2-b^2)^{\frac{3}{2}}(\rho^2-c^2)^{\frac{3}{2}}},$$

valeur dont la limite est o pour $\rho=\infty$.

Les constantes $H_x, \ldots, K_x, \ldots$ se déterminent au moyen

des conditions (22). Il nous reste maintenant à déterminer les valeurs (16). Nous aurons d'abord [1]

$$m_x = D_x \int x\,dy\,dz = M' D_x,$$

$$i_x = E_x \left[\int y^2 z\,dy\,dx - \int z^2 y\,dz\,dx \right]$$

$$= E_x \left[\int y^2\,dx\,dy\,dz - \int z^2\,dx\,dy\,dz \right] = E_x (C' - B'),$$

en désignant par B′ et C′ les moments d'inertie du liquide déplacé par rapport à Oy et Oz.

En remarquant que

$$\frac{\partial D_y}{\partial y} = \frac{dD_y}{d\rho}\frac{\partial \rho}{\partial y}, \qquad \frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{dE_z}{d\rho}\frac{\partial \rho}{\partial y},$$

il vient

$$\alpha_x = M' D_y E_z + \frac{dD_y}{d\rho}\frac{dE_z}{d\rho}\int x y^2 \frac{\partial \rho^2}{\partial y^2}\,dy\,dz + \frac{dD_y E_z}{d\rho}\int x y \frac{\partial \rho}{\partial y}\,dy\,dz.$$

On déduit de la première des équations (19)

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{1}{\dfrac{x^2}{\rho^4} + \dfrac{y^2}{(\rho^2 - b^2)^2} + \dfrac{z^2}{(\rho^2 - c^2)^2}}\,\frac{y}{\rho(\rho^2 - b^2)}.$$

Après avoir porté cette valeur dans l'expression de α_x, on remplacera x par sa valeur en fonction de y, z, déduite de l'équation précitée, et l'on n'aura plus qu'à effectuer deux intégrations pour l'étendue de la surface.

On pourra aussi poser

$$x = \rho \sin\theta \cos\psi, \qquad y = \sqrt{\rho^2 - b^2}\sin\theta \sin\psi, \qquad z = \sqrt{\rho^2 - c^2}\cos\theta,$$

$$dy\,dz = -\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}\sin^2\theta \cos\psi\,d\psi,$$

et les limites des intégrations seront o et π pour θ, et o, 2π pour ψ.

On déterminera de la même manière α'_x, β_x, γ_x, α_y, α'_y, ...

---

[1] Il ne faut pas perdre de vue que les D et E et leurs dérivées par rapport à ρ sont constants pour la surface.

(*f*) *Le corps est une sphère.* — Supposons que, pour l'ellipsoïde, on ait obtenu une intégrale de la forme

$$\int f(\rho, \rho_1, \rho_2, b, c)\, d\rho_1 d\rho_2,$$

l'intégrale s'étendant à la surface entière de l'ellipsoïde. Proposons-nous de déterminer la forme que prend cette intégrale lorsque l'ellipsoïde devient une sphère. Nous poserons $b = \varepsilon c$, et nous remplacerons les variables ρ_1, ρ_2 par les variables

$$\lambda = \frac{c}{\rho_1}, \qquad \mu = \frac{\varepsilon c}{\rho_2};$$

puis, dans les résultats de la substitution, nous ferons $\varepsilon = 0$, $c = 0$. On voit, en effet, que la deuxième et la troisième des équations (19) se réduisent respectivement à celles d'un cône de révolution autour de l'axe Oz et d'un plan passant par cet axe. Toutefois, cette observation est ici sans importance, attendu que nous continuerons à ne considérer que les secondes expressions des valeurs (16), où ρ_1 et ρ_2 n'entrent pas explicitement.

Pour $b = 0$, $c = 0$, les formules (24) et (25) donnent

$$\frac{dD_x}{d\rho} = \frac{H_x}{\rho^4}, \qquad \ldots,$$

$$D_x = -\frac{1}{3}\frac{H_x}{\rho^3}, \qquad \ldots,$$

$$\frac{dE_x}{d\rho} = \frac{K_x}{\rho^6}, \qquad \ldots,$$

$$E_x = -\frac{1}{5}\frac{K_x}{\rho^5}, \qquad \ldots.$$

En substituant dans les conditions (22), on reconnaît que tous les H ont la même valeur

$$H = -\frac{3}{2}\rho_0^4$$

et que les K sont nuls. Il résulte de là que les m ont pour valeur

$$m = -\frac{M'}{2}, \tag{26}$$

que les autres constantes (16) sont nulles. Les termes relatifs à la rotation disparaissent, ce qui devait être; de sorte qu'il suffit de supposer que la sphère n'est animée que d'un mouvement de translation, et l'on retombe sur une question qui a été traitée plus haut.

(*g*) *Pendule terminé par une sphère.* — En désignant par θ l'écart du pendule par rapport à la verticale de suspension, la formule (18′) donne, en ayant égard à la valeur (26),

$$\left[A + \left(M + \frac{M'}{2}\right) l^2\right] \frac{d^2\theta}{dt^2} = -(M - M') g l \sin\theta.$$

En désignant par λ, λ' les longueurs du pendule synchrone dans le vide et dans le liquide, on a

$$\lambda = \frac{A + Ml^2}{Ml}, \qquad \lambda' = \frac{A + \left(M + \frac{M'}{2}\right) l^2}{(M - M') l}.$$

Si l'on suppose que $\frac{M'}{M}$ soit assez petit pour qu'on puisse en négliger le carré, on trouve

$$\lambda' = \lambda \left[1 + \nu \frac{M'}{M}\right],$$

en posant

$$\nu = 1 + \frac{l}{2\lambda}.$$

Ainsi le liquide a pour effet d'augmenter la longueur du pendule synchrone d'une quantité proportionnelle au rapport de la masse du liquide déplacé à celle de la sphère.

De ce que $\lambda > l$, on a $\nu < \frac{3}{2} = 1,5$, tandis que, d'après les expériences du général Duchemin, dans l'eau, ν serait compris entre 1,6 et 1,7.

§ II. — *Des ondes liquides.*

75. Lorsqu'on agite l'eau en un endroit de sa surface, on voit aussitôt se former des ondes qui se propagent circulairement autour d'un centre et qui sont dues aux élévations et

aux abaissements successifs du fluide au-dessus et au-dessous de son niveau naturel.

En supposant que les vitesses des molécules liquides soient très petites à l'instant initial et qu'elles continuent à rester assez petites pour qu'on puisse en négliger le carré, et en dirigeant l'axe Oz dans le sens de la pesanteur, nous avons, pour les équations du mouvement du liquide,

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{p}{\rho} = gz - \dfrac{\partial\varphi}{\partial t}, \\ \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0. \end{cases}$$

Nous ferons coïncider le plan xOy avec le niveau statique du liquide.

Si nous suivons une molécule dans son mouvement, la première des équations (1) nous donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dt} &= g\frac{dz}{dt} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial t\,\partial x}\frac{dx}{dt} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial t\,\partial y}\frac{dy}{dt} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial t\,\partial z}\frac{dz}{dt} \\ &= g\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial t\,\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial t\,\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial t\,\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial z} \\ &= g\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial\varphi^2}{\partial x^2} + \frac{\partial\varphi^2}{\partial y^2} + \frac{\partial\varphi^2}{\partial z^2}\right] \end{aligned}$$

ou simplement

$$(2)\qquad \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dt} = g\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}.$$

La pression restant constante à la surface, nous avons la condition

$$(3)\qquad g\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \quad \text{pour } z = 0.$$

La profondeur h du liquide étant supposée constante, on devrait avoir $\dfrac{\partial\varphi}{\partial z} = 0$ pour $z = h$. Mais, pour nous rapprocher des conditions de l'observation, nous admettrons que cette profondeur est assez grande par rapport à l'étendue des oscillations des molécules liquides, pour que nous puissions la

considérer comme infinie. Nous aurons donc cette seconde condition

$$(4) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad \text{pour } z = \infty.$$

Si nous désignons par M une fonction du temps, et par m, n, α, β quatre constantes réelles arbitraires, la seconde des équations (1) et la condition (4) seront satisfaites par

$$\varphi = \mathrm{M} e^{-z\sqrt{m^2+n^2}} \cos m(x-\alpha) \cos n(y-\beta).$$

En portant cette valeur dans la condition (3), nous trouvons

$$\frac{d^2\mathrm{M}}{dt^2} = -g\sqrt{m^2+n^2}\,\mathrm{M};$$

d'où

$$\mathrm{M} = \mathrm{A}_{m,n} \sin t\sqrt{g}\sqrt[4]{m^2+n^2} + \mathrm{A}'_{m,n} \cos t\sqrt{g}\sqrt[4]{m^2+n^2},$$

$\mathrm{A}_{m,n}$, $\mathrm{A}'_{m,n}$ étant deux nouvelles constantes arbitraires.

Nous pouvons donc écrire

$$\varphi = \Sigma e^{-z\sqrt{m^2+n^2}} \left(\mathrm{A}_{m,n} \sin t\sqrt{g}\sqrt[4]{m^2+n^2} + \mathrm{A}'_{m,n} \cos t\sqrt{g}\sqrt[4]{m^2+n^2}\right) \times \cos m(x-\alpha) \cos n(x-\beta),$$

expression dans laquelle le signe Σ s'étendra à toutes les valeurs possibles de m, n, α, β, $\mathrm{A}_{m,n}$, $\mathrm{A}'_{m,n}$. Comme cette valeur satisfait à la condition $\frac{dp}{dt} = 0$, quel que soit z, on voit qu'une molécule éprouve la même pression pendant toute la durée de son mouvement.

Nous supposerons que les vitesses initiales sont nulles, ce

---

(1) L'équation (3) étant satisfaite, quel que soit z, on a

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{1}{g}\frac{\partial^4 \varphi}{\partial t^4}$$

ou, en vertu de la seconde des équations (1),

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial t^4} + g^2\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right) = 0,$$

équation due à M. Boussinesq et qui a servi de point de départ à ce savant dans ses recherches sur le mouvement des ondes liquides.

qui aura lieu si, après avoir enfoncé un corps solide jusqu'à une certaine profondeur dans le liquide (laquelle d'ailleurs doit être très faible, en raison de l'hypothèse que l'on a faite sur la grandeur des vitesses) et, après avoir donné au fluide le temps de revenir au repos, on retire subitement le solide pour abandonner le liquide à l'action de la pesanteur. La condition que $\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0$ pour $t=0$ exige que les $A'_{m,n}$ soient nuls, et l'on a alors

$$(5)\quad \varphi=\Sigma e^{-z\sqrt{m^2+n^2}}A_{m,n}\sin t\sqrt{g}\sqrt[4]{m^2+n^2}\cos m(x-\alpha)\cos n(y-\beta).$$

Soient z' l'ordonnée du point (x,y) de la surface à l'instant t; z'_0 sa valeur pour $t=0$: l'équation (3) peut se mettre sous la forme

$$g\frac{dz'}{dt}=\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)_{z=0}.$$

d'où

$$(6)\qquad gz'=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{z=0}$$

et

$$(7)\qquad \sqrt{g}\,z'_0=\Sigma\sqrt[4]{m^2+n^2}\,A_{m,n}\cos m(x-\alpha)\cos n(y-\beta).$$

Pour toute l'étendue du contact du solide et du liquide, z'_0 sera une fonction donnée $f(x,y)$; d'où

$$(8)\quad z'_0=f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{g}}\Sigma\sqrt[4]{m^2+n^2}\,A_{m,n}\cos m(x-\alpha)\cos n(y-\beta);$$

en dehors de cette étendue, z'_0 sera nul. Comme on le verra ci-après, la relation (8) permettra de faire disparaître les arbitraires que φ renferme.

76. Mouvement du liquide lorsqu'il est contenu dans un canal dont la longueur est infinie. — Nous supposerons que : 1° les parois latérales sont verticales; 2° le plan xOz est équidistant de ces parois; 3° l'ébranlement initial est tel que les molécules fluides n'éprouvent pas de déplacements parallèles à Oy : c'est ce qui aura lieu si le solide partiellement immergé est un cylindre transversal.

Comme φ est indépendant de y, on devra faire, dans ce qui précède, $n = 0$, $f(x, y) = f(x)$, et l'on aura

$$(1)\quad \begin{cases} \varphi = \Sigma e^{-mz} A_m \sin t\sqrt{mg} \cos m(x-\alpha), \\ f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{g}} \displaystyle\int_0^\infty \sqrt{m}\, A_m \cos m(x-\alpha). \end{cases}$$

Une formule de Fourier donne

$$(2)\qquad f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dm \int f(\alpha) \cos m(x-\alpha)\, d\alpha,$$

l'intégrale relative à α se rapportant uniquement à la largeur de la zone superficielle de l'ébranlement.

Si l'on désigne par $2l$ cette largeur et si l'on fait passer Oz par son milieu, on peut écrire, en remplaçant le périmètre de la section du segment immergé par sa parabole osculatrice et en désignant la flèche par h,

$$(3)\qquad z'_0 = f(x) = h\left(\frac{l^2 - x^2}{l^2}\right).$$

On remarquera que

$$(4)\qquad \Omega = \int_{-l}^{l} f(x)\, dx$$

est l'aire de la section immergée du cylindre.

En identifiant les valeurs (1) et (2) de $f(x)$, on trouve

$$A_m = \frac{\sqrt{g}}{\pi}\, dm\, \frac{f(\alpha)\, d\alpha}{\sqrt{m}},$$

et l'on a, par suite,

$$(5)\qquad \varphi = \frac{\sqrt{g}}{\pi}\int_0^\infty dm \int_{-l}^{l} f(\alpha) e^{-mz} \frac{\sin t\sqrt{mg}}{\sqrt{m}} \cos m(x-\alpha)\, d\alpha.$$

Posons

$$r = \sqrt{z^2 + (x-\alpha)^2}, \qquad \operatorname{tang}\psi = \frac{x-\alpha}{z}, \qquad i = \sqrt{-1}$$

et

$$(6)\qquad \begin{cases} k = z + i(x-\alpha) = r(\cos\psi + i\sin\psi), \\ k' = z - i(x-\alpha) = r(\cos\psi - i\sin\psi), \\ m = u^2. \end{cases}$$

Comme tout est symétrique par rapport au plan yOz, il suffira de considérer le mouvement de la masse liquide située du côté des x positifs.

En remplaçant, dans la formule (5), $\cos m(x-\alpha)$ par son expression en exponentielles imaginaires, on trouve

$$(7)\qquad \varphi = \frac{\sqrt{g}}{\pi}\int_0^\infty du \int_{-l}^{l} f(\alpha)\left(e^{-ku^2}+e^{-k'u^2}\right)\sin ut\sqrt{g}\,.\,d\alpha.$$

On a

$$Y = \int_0^\infty e^{-ku^2}\sin ut\sqrt{g}\,.\,du = \frac{\sqrt{g}}{2k}\,e^{-\frac{gt^2}{4k}}\int_0^t e^{\frac{g\zeta^2}{4k}}\,d\zeta\ (^1)$$

ou, en faisant $\zeta = vt$,

$$(8)\qquad Y = \frac{t\sqrt{g}}{2k}\int_0^1 e^{-\frac{gt^2(1-v^2)}{4k}}\,dv$$

ou encore

$$Y = \frac{t\sqrt{g}}{2r}(\cos\psi - i\sin\psi)\int_0^1 e^{-\frac{gt^2(1-v^2)}{4r}(\cos\psi - i\sin\psi)}\,dv$$

$$= \frac{t\sqrt{g}}{2r}(\cos\psi - i\sin\psi)\int_0^1 e^{-\frac{gt^2(1-v^2)}{4r}\cos\psi}\left\{\cos\left[\frac{gt^2(1-v^2)\sin\psi}{4r}\right]\right.$$
$$\left. + i\sin\left[\frac{gt^2(1-v^2)\sin\psi}{4r}\right]\right\}dv.$$

---

(1) Soient b un coefficient réel, a une constante positive ou bien imaginaire, mais dont la partie réelle est positive. Si l'on différentie par rapport à b, l'expression

$$Y = \int_0^\infty e^{-au^2}\sin bu\,.\,du$$

et que l'on intègre ensuite par partie par rapport à u, on trouve

$$\frac{dY}{db} = \int_0^\infty e^{-au^2}\cos bu\,.\,u\,du = -\frac{1}{2a}\left(-1 + b\int_0^\infty e^{-au^2}\sin bu\,.\,du\right)$$

ou

$$\frac{dY}{db} + \frac{bY}{2a} - \frac{1}{2a} = 0.$$

On déduit de là, en remarquant que Y est nul avec b,

$$Y = \frac{e^{-\frac{b^2}{4a}}}{2a}\int_0^b e^{\frac{\zeta^2}{4a}}\,d\zeta.$$

On a, de même,

$$Y' = \int_0^\infty e^{-k'u} \sin ut \sqrt{g}\, du$$

$$= \frac{t\sqrt{g}}{2r}(\cos\psi + i\sin\psi)\int_0^1 e^{-\frac{gt^2(1-v^2)}{4r}\cos\psi}\left\{\cos\left[\frac{gt^2(1-v^2)\sin\psi}{4r}\right]\right.$$
$$\left. - i\sin\left[\frac{gt^2(1-v^2)\sin\psi}{4r}\right]\right\} dv;$$

par suite,

$$Y + Y' = \frac{t\sqrt{g}}{r}\int_0^1 e^{-\frac{gt^2(1-v^2)}{4r}\cos\psi}\left\{\cos\psi\cos\left[\frac{gt^2(1-v^2)\sin\psi}{4r}\right]\right.$$
$$\left. + \sin\psi\sin\left[\frac{gt^2(1-v^2)\sin\psi}{4r}\right]\right\} dv,$$

et, en remarquant que $\cos\psi = \frac{z}{r}$, $\sin\psi = \frac{x-\alpha}{r}$, on obtient finalement

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi = \frac{tg}{\pi}\int_0^1 dv\int_{-l}^{l}\frac{f(\alpha)}{r^2}e^{-\frac{gt^2(1-v^2)z}{4r^2}}\Big\{z\cos\left[\frac{gt^2(x-\alpha)(1-v^2)}{4r^2}\right] \\ + (x-\alpha)\sin\left[\frac{gt^2(x-\alpha)(1-v^2)}{4r^2}\right]\Big\} d\alpha. \end{aligned}\right.$$

A la surface, ou pour $z = 0$, on a $r = x - \alpha$, et

$$\varphi = \frac{g}{\pi}\int_0^1 dv\int_{-l}^{l}\frac{f(\alpha)}{x-\alpha}\, t\sin\frac{gt^2(1-v^2)}{4(x-\alpha)}\, d\alpha;$$

d'où, en vertu de la formule (6) du n° 75,

$$z' = \frac{1}{\pi}\int_0^1 dv\int_{-l}^{l}\frac{f(\alpha)}{x-\alpha}\left[\frac{\sin gt^2(1-v^2)}{4(x-\alpha)} + \frac{gt^2(1-v^2)}{2(x-\alpha)}\cos\frac{gt^2(1-v^2)}{4(x-\alpha)}\right] d\alpha.$$

Comme une intégration par partie donne

$$\int_0^1 \sin\frac{gt^2(1-v^2)}{4(x-\alpha)}\, dv = \frac{gt^2}{2(x-\alpha)}\int_0^1 v^2\cos\frac{gt^2(1-v^2)}{4(x-\alpha)}\, dv,$$

l'expression ci-dessus se réduit à

$$(10)\qquad z' = \frac{gt^2}{2\pi}\int_0^1 dv\int_{-l}^{l}\frac{f(\alpha)}{(x-\alpha)^2}\cos\frac{gt^2(1-v^2)}{4(x-\alpha)}\, d\alpha.$$

En identifiant cette valeur à celle que l'on déduit de l'équation (5) [eu égard à la formule (6) du n° 78], on trouve

$$\int_{-l}^{l} f(\alpha)\,d\alpha \int_0^\infty \cos m(x-\alpha)\cos t\sqrt{mg}\,dm$$
$$= \frac{gt^2}{2}\int_{-l}^{l} f(\alpha)\,d\alpha \int_0^1 \cos\frac{gt^2(1-v^2)}{4(x-\alpha)}\,\frac{dv}{(x-\alpha)^2};$$

d'où

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^\infty \cos m(x-\alpha)\cos t\sqrt{mg}\,dm \\ &\quad = \frac{gt^2}{2(x-\alpha)^2}\int_0^1 \cos\frac{gt^2(1-v^2)}{4(x-\alpha)}\,dv. \end{aligned}\right.$$

Premiers mouvements du liquide à la suite de l'ébranlement. — Si t est suffisamment petit, et si l'on considère des molécules suffisamment éloignées de l'ébranlement, la quantité $\frac{gt^2}{4r}$ sera petite et l'on aura

$$e^{-\frac{gt^2(1-v^2)}{4k}} = 1 - \frac{gt^2}{4k}(1-v^2) + \frac{1}{1.2}\left(\frac{gt^2}{4k}\right)^2(1-v^2)^2 - \ldots.$$

En portant cette valeur dans la formule (8) et posant

$$A_n = \int_0^1 (1-v^2)^n\,dv,$$

on obtient

$$Y = \frac{t\sqrt{g}}{2k}\left[A_0 - A_1\frac{gt^2}{4k} + \frac{A_2}{1.2}\left(\frac{gt^2}{4k}\right)^2 - \frac{A_3}{1.2.3}\left(\frac{gt^2}{4k}\right)^2 + \ldots\right].$$

Mais on a

$$A_0 = 1,$$
$$A_n = \frac{2n}{2n+1}A_{n-1},$$

d'où

$$A_n = \frac{2^n(1.2.3\ldots n)}{1.3.5.7\ldots(2n+1)};$$

par suite,

$$Y = \frac{t\sqrt{g}}{2k}\left[1 - \frac{1}{1.3}\frac{gt^2}{2k} + \frac{1}{1.3.5}\left(\frac{gt^2}{2k}\right)^2 - \ldots\right].$$

Si l'on remarque que

$$\frac{1}{k^n} = \frac{1}{r^n}(\cos\psi - i\sin\psi)^n = \frac{1}{r^n}(\cos n\psi - i\sin n\psi),$$

l'expression précédente devient

$$Y = \frac{t\sqrt{g}}{2r}\left[\cos\psi - i\sin\psi - \frac{1}{1.3}\frac{gt^2}{2r}(\cos 2\psi - i\sin 2\psi)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{1.3.5}(\cos 3\psi - i\sin 3\psi)\ldots\right].$$

et l'on obtiendra Y′ en y changeant le signe de i. On aura ainsi

$$(a)\quad Y + Y' = \frac{t\sqrt{g}}{r}\left[\cos\psi - \frac{1}{1.3}\frac{gt^2}{2r}\cos 2\psi + \frac{1}{1.3.5}\left(\frac{gt^2}{2r}\right)^2\cos 3\psi - \ldots\right].$$

La formule (7) ou

$$b)\qquad \varphi = \frac{\sqrt{g}}{\pi}\int_{-l} f(\alpha)(Y + Y')\,d\alpha$$

fera ensuite connaître le développement de φ suivant les puissances de t. Mais ce développement sera en défaut dans l'étendue de l'ébranlement; car r, qui se réduit à $x - \alpha$, s'annulera entre $x = -l$ et $x = l$.

S'il s'agit d'un point assez éloigné de l'ébranlement pour qu'on puisse négliger $\frac{l}{x}$, par suite $\frac{\alpha}{x}$, devant l'unité, les valeurs $r = \sqrt{z^2 + x^2}$, $\operatorname{tang}\psi = \frac{x}{z}$ devenant indépendantes de α, l'intégration pourra s'effectuer dans la formule (b) et, en se rappelant la signification de Ω, on aura

$$(b')\quad \varphi = \frac{gt\Omega}{\pi r}\left[\cos\psi - \frac{1}{1.3}\frac{gt^2}{2r}\cos 2\psi + \frac{1}{1.3.5}\left(\frac{gt^2}{2r}\right)^2\cos 3\psi - \ldots\right].$$

Quelque petit que soit t et quelque grand que soit r, les vitesses $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ auront des valeurs finies; d'où il suit que l'ébranlement se transmet instantanément dans toute la masse fluide. Si l'on veut connaître la loi du mouvement aux pre-

miers instants qui suivent l'ébranlement, il suffit de s'arrêter au premier terme du développement de φ ou d'écrire

$$\varphi = \frac{g\Omega}{\pi}\frac{z}{z^2+x^2};$$

d'où

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{2\Omega gt}{\pi}\frac{zx}{(z^2+x^2)^2} = -\frac{\Omega gt}{\pi}\frac{\sin 2\psi}{r^2},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\Omega gt}{\pi}\frac{x^2-z^2}{(z^2+x^2)^2} = -\frac{\Omega gt}{\pi}\frac{\cos 2\psi}{r^2},$$

et, pour la vitesse résultante,

$$V = \frac{\Omega gt}{\pi r^2}.$$

Lois que suit le mouvement lorsqu'il est sur le point de s'éteindre. — C'est ce qui aura lieu au bout d'un temps considérable.

En faisant $1 - v^2 = u$ dans la formule (8), on obtient

$$(c) \qquad Y = \frac{t\sqrt{g}}{4k}\int_0^1 \frac{e^{-\frac{gt^2u}{4k}}}{\sqrt{1-u}}\,du.$$

Si l'on pose

$$(d) \qquad m = \frac{gt^2}{4k} = \frac{gt^2}{4r}\left[\cos\psi - \frac{i(x-\alpha)}{r}\right],$$

on a

$$e^{-m} = e^{-\frac{gt^2\cos\psi}{4r}}\left[\cos\frac{gt^2(x-\alpha)}{4r^2} - i\sin\frac{gt^2(x-\alpha)}{4r^2}\right].$$

Si on laisse de côté le cas où ψ est très voisin de 90°, e^{-m} devra être considéré comme une petite quantité.

En intégrant par partie et remarquant que le développement de $(1-u)^{\frac{1}{2}}$ est encore convergent quand $u = 1$, on a

$$\int_0^1 \frac{e^{-mu}}{\sqrt{1-u}}\,du = -2\left(-1 + m\int_0^1 e^{-mu}\sqrt{1-u}\,du\right)$$

$$= -2\left\{-1 + m\int_0^1 e^{-mu}\left[1 - \frac{u}{2} - \frac{1}{1.2}\left(\frac{u}{2}\right)^2 - \ldots - \frac{1.3.5\ldots(2p-3)}{1.2.3\ldots p}\left(\frac{u}{2}\right)^p - \ldots\right]\right\}du.$$

Si l'on intègre par partie, on trouve

$$A_p = \int_0^1 e^{-mu} u^p \, du = -\frac{1}{m}\left(e^{-m} - p\int_0^1 e^{-mu} u^{p-1} \, du\right) = -\frac{e^{-m}}{m} + \frac{p}{m} A_{p-1},$$

et l'on a, de plus,

$$A_0 = -\frac{e^{-m}}{m} + \frac{1}{m}.$$

En limitant le développement ci-dessus à un nombre restreint $p+1$ de termes, on pourra calculer A_p en négligeant e^{-m}, et l'on a alors

$$A_p = \frac{1.3\ldots p}{m^{p+1}};$$

par suite,

$$\int_0^1 \frac{e^{-mu}}{\sqrt{1-u}} du = \frac{1}{m}\left[1 + \frac{1}{2m} + \frac{1.3}{(2m)^2} + \ldots + \frac{1.3.5\ldots(2p-3)}{(2m)^{p-1}}\right].$$

Il vient donc

$$Y = \frac{1}{t\sqrt{g}}\left[1 + \frac{2k}{gt^2} + 1.3\left(\frac{2k}{gt^2}\right)^2 + \ldots + 1.3.5\ldots(2p-3)\left(\frac{2k}{gt^2}\right)^p\right]$$

ou encore

$$Y = \frac{1}{t\sqrt{g}}\left[1 + \frac{2r}{gt^2}(\cos\psi + i\sin\psi) + 1.3\left(\frac{2r}{gt^2}\right)^2(\cos 2\psi + i\sin 2\psi) + \ldots\right].$$

On obtiendra Y' en changeant le signe de i dans cette expression, et l'on aura

$$Y + Y' = \frac{2}{t\sqrt{g}}\left[1 + \frac{2r}{gt^2}\cos\psi + 1.3\left(\frac{2r}{gt^2}\right)^2\cos 2\psi + \ldots\right].$$

Si l'on considère une molécule assez éloignée de l'ébranlement pour qu'on puisse négliger $\frac{\alpha}{x}$ devant l'unité, les quantités r et ψ devenant indépendantes de α, la formule (b) de l'article précédent donnera

$$\varphi = \frac{2\Omega}{\pi t}\left[1 + \frac{2r\cos\psi}{gt^2} + 1.3\left(\frac{2r}{gt^2}\right)^2\cos 2\psi + \ldots\right]$$
$$= \frac{2\Omega}{\pi t}\left[1 + \frac{2z}{gt^2} + \frac{12}{g^2t^4}(z^2 - x^2) + \ldots\right].$$

En partant de là, on voit que $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ est négligeable devant $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$. Comme la vitesse

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{4\Omega}{\pi g t^3},$$

réduite à son premier terme, est positive, le mouvement final se fera dans le sens de la pesanteur.

Propagation des ondes à la surface. — On déduit des formules (10) et (3), en substituant u à v,

$$(12) \qquad z' = \frac{hgt^2}{2\pi l^2}\int_0^l du \int_{-l}^{l} \frac{l^2-\alpha^2}{(x-\alpha)^2}\cos\frac{gt^2(1-u^2)}{4(x-\alpha)}\,d\alpha.$$

Dans le voisinage de l'ébranlement, z' ne présente rien de remarquable; c'est seulement dans la partie qui en est éloignée que la propagation se fait suivant des lois régulières. Nous supposerons donc que $\frac{l}{x}$; par suite $\frac{\alpha}{x}$ est très petit, ce qui permettra de remplacer $(x-\alpha)^2$ par x^2. En ce qui concerne le cosinus qui entre dans l'expression de z', on remarquera d'abord que l'on a à peu près

$$\frac{gt^2(1-u^2)}{4(x-\alpha)} = \frac{gt^2(1-u^2)}{4x} + \frac{gt^2(1-u^2)}{4x}\frac{\alpha}{x}.$$

Si l'on désigne par n le plus grand nombre de circonférences contenues dans $\frac{gt^2}{4x}$, on pourra écrire

$$\frac{gt^2(1-u^2)}{4x} = 2n\pi + \varepsilon,$$

ε étant inférieur à 2π, et l'on aura

$$\cos\frac{gt^2(1-u^2)}{4(x-\alpha)} = \cos\varepsilon\cos\left[(2n\pi+\varepsilon)\frac{\alpha}{x}\right] - \sin\varepsilon\sin\left[(2n\pi+\varepsilon)\frac{\alpha}{x}\right]$$

ou, à peu près,

$$\cos\frac{gt^2(1-u^2)}{4(x-\alpha)} = \cos\varepsilon\cos\left(2n\pi\frac{x}{\alpha}\right) - \sin\varepsilon\sin\left(2n\pi\frac{x}{\alpha}\right).$$

Si $\frac{gt^2}{4x}$, par suite n, est assez petit pour que $2n\pi\frac{x}{\alpha}$ reste très petit, la valeur du second membre de l'expression précédente se réduira très sensiblement à $\cos\varepsilon = \cos\frac{gt^2(1-u^2)}{4x}$: en d'autres termes, on pourra négliger α devant x sous le cosinus de la valeur de z'. Mais, si $\frac{gt^2}{4x}$ est suffisamment grand, le sinus ou le cosinus de $2n\pi\frac{\alpha}{x}$ pourra devenir du même ordre de grandeur que $\sin\varepsilon$ ou $\cos\varepsilon$, et il ne sera plus permis de négliger $\frac{\alpha}{x}$ sous le cosinus de z'. Nous avons donc deux cas à distinguer :

Premier cas : $\frac{gt^2}{4x}$ n'est pas très grand. — On a

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} z' &= \frac{hgt^2}{2\pi l^2 x^2}\int_{-l}^{l}(l^2-\alpha^2)\,d\alpha\int_0^1\cos\frac{gt^2(1-u^2)}{4x}\,du \\ &= \frac{2hlgt^2}{3\pi x^2}\int_0^1\cos\frac{gt^2(1-u^2)}{4x}\,du. \end{aligned}\right.$$

Si l'on pose

$$A_{2n} = \int_0^1(1-u^2)^{2n}\,du = \frac{4^2(1.2.3\ldots 2n)}{1.3.5\ldots(4n+1)},$$

on trouve, pour le développement en série de z' suivant les puissances de t^2,

$$z' = \frac{2hlgt^2}{3\pi x^2}\left[A_0 - \frac{A_2}{2}\left(\frac{gt^2}{4x}\right)^2 + \frac{A_4}{2.3.4}\left(\frac{gt^2}{4x}\right)^4 - \frac{A_6}{2.3.4.5.6}\left(\frac{gt^2}{4x}\right)^6 + \ldots\right]$$

ou

$$(14)\quad z' = \frac{8hl}{3\pi gt^2}\left(\frac{gt^2}{2x}\right)^2\left[1 - \frac{1}{1.3.5}\left(\frac{gt^2}{2x}\right)^2 + \frac{1}{1.3.5.7.9}\left(\frac{gt^2}{2x}\right)^4 - \ldots\right].$$

Si l'on s'en tient au premier terme de ce développement, qui est positif, on voit que, à une distance sensible de l'ébranlement, le liquide commence à éprouver un abaissement au-dessous du niveau et que cet abaissement est proportionnel au carré du temps et en raison inverse du carré de la distance à l'ébranlement.

L'équation $\frac{\partial z'}{\partial x} = 0$ déterminera, à un instant donné, les points les plus hauts et les plus bas de la surface, points qui seront les sommets des ondes qui se propagent. Si l'on pose

$$\left(\frac{gt^2}{2x}\right)^2 = p,$$

cette équation devient

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} & 1 - \frac{2p}{1.3.5} + \frac{3p^2}{1.3.5.7.9} \\ & - \frac{4p^3}{1.3.5.7.9.11.13} + \frac{5p^4}{1.3.5.7.9.11.13.15.17} - \ldots = 0: \end{aligned}\right.$$

ses racines réelles et positives $p_1, p_2, \ldots$, dont le nombre est infini, forment une suite croissante; mais on devra rejeter celles qui sont trop grandes, puisqu'on a supposé que $\frac{gt^2}{4x}$, par suite p, était une petite quantité.

Pour une racine quelconque p_i, on a

$$(16)\qquad x = \frac{gt^2}{2\sqrt{p_i}}.$$

Le mouvement apparent de chaque ordonnée maxima, positive ou négative, sera donc uniformément accéléré et sera indépendant de l'ébranlement. La distance horizontale de deux sommets consécutifs ou *longueur d'onde* a pour expression générale

$$\lambda_i = \frac{gt^2}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{p_i}} - \frac{1}{\sqrt{p_{i+1}}}\right) = x\left(1 - \sqrt{\frac{p_i}{p_{i+1}}}\right).$$

On voit que cette longueur varie proportionnellement au carré du temps ou à la distance à l'ébranlement. D'après la formule (14), l'inverse a lieu pour les hauteurs maxima.

Les ondes correspondant à $p_1, p_2, p_3, \ldots$ sont de moins en moins rapides, et nous avons, pour les deux premières,

$$p_1 = 9,4482, \quad x = 0,3253\frac{gt^2}{2}, \quad z' = 3,6777\frac{hl}{gt^2} = 0,5982\frac{hl}{x},$$

$$p_2 = 71,5, \quad x = 0,1183\frac{gt^2}{2}, \quad z' = -25,114\frac{hl}{gt^2} = -1,4512\frac{hl}{x}.$$

Second cas : $\frac{gt^2}{4x}$ est très grand. — L'équation (12) peut se mettre sous la forme

$$(12')\left\{\begin{aligned} z' &= \frac{h}{2\pi l^2}\int_{-l}^{l}(l^2-\alpha^2)\,d\alpha\,\frac{gt^2}{(x-\alpha)^2}\int_0^1 \cos\frac{gt^2(1-u^2)}{4(x-\alpha)}\,du \\ &= \frac{h}{2\pi l^2}\int_{-l}^{l}(l^2-\alpha^2)\,d\alpha\,\frac{gt^2}{(x-\alpha)^2}\left[\int_0^\infty \cos\frac{gt^2(1-u^2)}{4(x-\alpha)}\,du - \int_1^\infty \cos\frac{gt^2(1-u^2)}{4(x-\alpha)}\,du\right]. \end{aligned}\right.$$

Si nous posons

$$\frac{gt^2}{4(x-\alpha)} = m,$$

nous avons d'abord

$$(e)\left\{\begin{aligned} \int_0^\infty \cos m(1-u^2)\,du &= \cos m\int_0^\infty \cos mu^2\,du + \sin m\int_0^\infty \sin mu^2\,du \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2m}}(\cos m + \sin m) \quad (^1). \end{aligned}\right.$$

En intégrant successivement par partie, on obtient

$$(f)\left\{\begin{aligned} &\int_1^\infty \cos m(1-u^2)\,du \\ &= \frac{1}{2}\int_1^\infty \cos m(1-u^2)\,\frac{du^2}{u} = -\frac{1}{2m}\int_1^\infty \sin m(1-u^2)\,\frac{du}{u^2} \\ &= \frac{1}{(2m)^2} - \frac{3}{(2m)^2}\int_1^\infty \cos m(1-u^2)\,\frac{du}{u^4} \\ &= \frac{1}{(2m^2)} + \frac{3.5}{(2m)^3}\int_1^\infty \sin m(1-u^2)\,\frac{du}{u^6} \\ &= \frac{1}{(2m^2)} - \frac{3.5}{(2m)^4} + \frac{3.5.7}{(2m)^4}\int_1^\infty \cos m(1-u^2)\,\frac{du}{u^8} \\ &= \frac{1}{(2m)^2} - \frac{3.5}{(2m)^4} - \frac{3.5.7.9}{(2m)^5}\int_1^\infty \sin m(1-u^2)\,\frac{du}{u^{10}} \\ &= \frac{1}{(2m)^2} + \frac{3.5}{(2m)^4} + \frac{3.5.7.9}{(2m)^6} - \ldots \end{aligned}\right.$$

---

(1) En posant $u = \sqrt{\frac{\pi}{2m}}\,y$, on a, par exemple,

$$\int_0^\infty \cos mu^2\,du = \sqrt{\frac{\pi}{2m}}\int_0^\infty \cos\frac{\pi y^2}{2m} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2m}}.$$

En ayant égard aux valeurs (e) et (f) et à celle de m, on trouve

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{gt^2}{(x-\alpha)^2}\int_0^1 \cos\frac{gt^2(1-u^2)}{4(x-\alpha)}\,du \\ &\quad = \frac{t\sqrt{2g\pi}}{2(x-\alpha)^{\frac{3}{2}}}\left[\cos\frac{gt^2}{4(x-\alpha)} + \sin\frac{gt^2}{4(x-\alpha)}\right] \\ &\qquad - \frac{4}{gt^2} + \frac{3.5.4^2}{g^3t^6}(x-\alpha^2) - \frac{3.5.7.9.4^3}{g^5t^{10}}(x-\alpha)^4 + \ldots. \end{aligned}\right.$$

Si t est suffisamment grand, on pourra négliger ses puissances négatives, et, en se rappelant que $\frac{\alpha}{x}$ est censé une petite fraction, l'équation $(12')$ deviendra

$$(12'')\quad z' = \frac{h}{2\pi l^2}\int_{-l}^{l}(l^2-\alpha^2)\frac{t}{x}\sqrt{\frac{g\pi}{2x}}\left[\cos\frac{gt^2}{4(x-\alpha)} + \sin\frac{gt^2}{4(x-\alpha)}\right]d\alpha.$$

D'après ce qui a été convenu, la quantité

$$(18)\qquad \chi = \frac{gt^2 l}{4x^2} = \frac{gt^2}{4x}\,\frac{l}{x}$$

a une valeur quelconque, et l'on a

$$\frac{t}{x}\sqrt{\frac{g\pi}{2x}} = \sqrt{\frac{2\pi\chi}{lx}}.$$

Si l'on pose

$$\alpha = lv$$

et si on néglige les termes de l'ordre $\frac{l}{x}$, on trouve

$$\frac{gt^2}{4(x-\alpha)} = \frac{gt^2}{4x} + \chi v;$$

il vient alors

$$z' = h\sqrt{\frac{\chi l}{2\pi x}}\left[\left(\cos\frac{gt^2}{4x} + \sin\frac{gt^2}{4x}\right)\int_{-1}^{1}(1-v^2)\cos\chi v.dv\right.$$
$$\left. + \left(\cos\frac{gt^2}{4x} - \sin\frac{gt^2}{4x}\right)\int_{-1}^{1}(1-v^2)\sin\chi v.dv\right].$$

La seconde des intégrales de z' est nulle, puisque ses élé-

ments sont deux à deux égaux et de signe contraire; la seconde se réduit facilement, et on a finalement

$$(19) \qquad z' = \frac{4h}{\chi^3}\sqrt{\frac{\chi l}{2\pi x}}(\sin\chi - \chi\cos\chi)\left(\cos\frac{gt^2}{4x} + \sin\frac{gt^2}{4x}\right),$$

expression qui devient nulle pour $\chi = \infty$ ou $t = \infty$, ce qui devait être.

Si nous posons

$$\frac{4h}{\chi^3}\sqrt{\frac{\chi l}{2\pi x}}(\sin\chi - \chi\cos\chi) = X, \qquad \cos\frac{gt^2}{4x} + \sin\frac{gt^2}{4x} = T,$$

nous avons

$$z' = XT.$$

La fonction T est périodique et son maximum $\pm\sqrt{2}$ a lieu quand $\frac{gt^2}{4x}$ est un multiple quelconque de π, augmenté de $\frac{\pi}{2}$. De ce que $\frac{gt^2}{4x}$ est très grand, T varie très rapidement et passe dans un temps très court τ d'un maximum positif à un maximum négatif. En négligeant τ^2, on a

$$\frac{g(t+\tau)^2}{4x} - \frac{gt^2}{4x} = \frac{gt\tau}{2x} = \pi$$

ou, en exprimant $\frac{t}{x}$ au moyen de χ,

$$\tau = \frac{\pi\sqrt{l}}{\sqrt{g\chi}}.$$

Pendant cet intervalle, χ et X ne variant pas sensiblement, on peut se représenter chaque point de la surface comme exécutant, dans le sens vertical, des oscillations dont la durée est τ et dont l'amplitude varie très lentement par rapport à cette durée. L'amplitude sera $2\sqrt{2}X$ et variera en raison inverse de $\sqrt{x}$.

La fonction T varie aussi très rapidement par rapport à x; ses maxima positifs et négatifs se succèdent alternativement à de très petits intervalles dans toute l'étendue de la surface;

les uns répondent aux ondes tracées en relief et les autres aux ondes tracées en creux, et la petite distance λ entre deux sommets consécutifs peut être prise pour la largeur d'onde. En négligeant λ^2, on a

$$\frac{gt^2}{4x} - \frac{gt^2}{4(x+\lambda)} = \frac{gt^2\lambda}{4x^2} = \pi,$$

d'où, en exprimant $\frac{t}{x}$ au moyen de χ,

$$\lambda = \frac{\pi l}{\chi}.$$

Comme on le voit, cette largeur varie avec le temps en un même point et d'un point à un autre au même instant; mais elle reste la même toutes les fois que la durée τ l'est aussi, et l'on a

$$\tau = \sqrt{\frac{\pi\lambda}{g}}.$$

Les racines positives de l'équation $X = 0$ ou

$$(\alpha) \qquad \operatorname{tang}\chi - \chi = 0$$

détermineront à chaque instant des points de la surface qui n'auront aucun mouvement vertical et qu'on pourra regarder comme des espèces de *nœuds mobiles* à cette surface. L'espace compris entre deux nœuds consécutifs, forme un groupe d'ondes que l'on peut considérer comme une seule *onde dentelée* qui paraît se mouvoir, en s'élargissant, en raison de la différence des vitesses des deux nœuds qui la terminent. Pour une racine quelconque χ_i de l'équation (α), on a

$$(\alpha') \qquad x = \frac{t}{2}\sqrt{\frac{gl}{\chi_i}},$$

et le mouvement de chaque nœud est uniforme. On a, pour les mouvements des trois nœuds qui vont le plus vite,

Pour	$\chi_1 = 4{,}4934\ldots$	$x = 0{,}2359\, t\sqrt{gl}$
»	$\chi_2 = 7{,}7248\ldots$	$x = 0{,}1799\, t\sqrt{gl}$
»	$\chi_3 = 11{,}0014\ldots$	$x = 0{,}1507\, t\sqrt{gl}$

Si l'on veut connaître, à un instant donné, les points de la surface qui font les plus grandes oscillations verticales, on a, pour les déterminer, l'équation $\frac{\partial X}{\partial x} = 0$, et en remarquant que $\frac{\partial \chi}{\partial x} = -\frac{2\chi}{x}$, cette équation devient

$$(\beta) \qquad (4\chi^2 - 9)\tang\chi + 9\chi = 0.$$

Elle n'a pas de racines réelles entre o et $\frac{3}{2}$; si $\chi > \frac{3}{2}$, elle ne peut en avoir que dans les quarts de cercle de rangs pairs, et elle n'en a qu'une seule dans chacun de ces quarts de cercle. Pour une racine quelconque χ'_i, on a

$$(\beta') \qquad x = \frac{t\sqrt{gl}}{2\sqrt{\chi'_i}}.$$

On voit ainsi que les points maxima des oscillations se meuvent uniformément avec une vitesse qui, comme pour les nœuds, est proportionnelle à $\sqrt{l}$. Mais, comme $\chi'_1 < \chi_1$, le premier maximum précède le premier nœud, ensuite il y a un maximum entre le premier et le second nœud et, généralement, un maximum pour chaque onde dentelée. C'est à ces maxima qu'il convient de rapporter le mouvement de ces espèces d'ondes. Ainsi la vitesse d'une onde dentelée sera pour nous celle qui correspond aux plus grandes oscillations verticales.

Soit $K = 2\sqrt{2}X$ l'amplitude qui correspond à $\chi = \chi'_i$. On a, en substituant dans X les valeurs de $\sin\chi'_i$, $\cos\chi'_i$ déduites de l'équation (β) et la valeur (β') de x,

$$K = \frac{32h}{\sqrt{\pi}}\sqrt[4]{\frac{4l}{gt^2}}\,\frac{\chi_i'^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{(2\chi_i'^2 - 9)^2 + 81\chi_i'^2}}.$$

La fonction

$$\frac{\chi^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(2\chi^2 - 9)^2 + 81\chi^2}}$$

croît à partir de $\chi = 0$ jusqu'à la plus petite racine χ'_1 de l'équation (β), puis elle croît ensuite indéfiniment à mesure que χ

augmente. Il suit de là que les deux premiers maxima sont les plus grands et que, vu la valeur (18), les autres forment une suite décroissante dans le sens où ils se rapprochent de l'origine des ondes.

On a

1° $$\chi'_1 = 1,8359,$$

d'où

$$x = 0,3691\, t\sqrt{gl}, \qquad K = 2,3527\, h\sqrt[4]{\frac{l}{gt^2}} = 1,4293\, h\sqrt{\frac{l}{x}},$$

$$\lambda = 1,7118\, l, \qquad \tau = 2,3191\sqrt{\frac{l}{g}};$$

2° $$\chi'_2 = 5,8958,$$

d'où

$$x = 0,2057\, t\sqrt{gl}, \qquad K = 0,6878\, h\sqrt[4]{\frac{l}{gt^2}} = 0,3121\, h\sqrt{\frac{l}{x}},$$

$$\lambda = 0,5331\, l, \qquad \tau = 1,2938\sqrt{gl}:$$

3° $$\chi'_3 = 9,1861,$$

d'où

$$x = 0,1649\, t\sqrt{gl}, \qquad K = 0,4030\, h\sqrt[4]{\frac{l}{gt^2}} = 0,2850\, h\sqrt[2]{\frac{l}{x}},$$

$$\lambda = 0,3420\, l, \qquad \tau = 1,0364\sqrt{\frac{l}{g}};$$

4° $$\chi'_4 = 12,3872,$$

d'où

$$x = 0,1421\, t\sqrt{gl}, \qquad K = 0,2741\, h\sqrt[4]{\frac{l}{gt^2}} = 0,1938\, h\sqrt{\frac{l}{x}},$$

$$\lambda = 0,3420\, l, \qquad \tau = 1,0364\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

77. Mouvement du liquide lorsque le niveau est indéfini en tous sens. — Reportons-nous à la formule (8) du n° 75. Nous

avons, par une extension de la formule de Fourier [1],

$$f(x,y)=\frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty dm\,dn\int\int f(\alpha,\beta)\cos m(x-\alpha)\cos n(y-\beta)\,d\alpha\,d\beta,$$

d'où, par comparaison avec la formule précitée,

$$A_{m,n}=\frac{1}{\pi^2}\frac{\sqrt{g}}{\sqrt[4]{m^2+n^2}}\,dm\,dn\,f(\alpha,\beta)\,d\alpha\,d\beta,$$

et la formule (5) du n° 75 devient

$$(1)\quad\left\{\begin{aligned}\varphi=\frac{\sqrt{g}}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{e^{-z\sqrt{m^2+n^2}}}{\sqrt[4]{m^2+n^2}}\,dm\,dn\\ \times\int\int f(\alpha,\beta)\sin t\sqrt{g}\sqrt[4]{m^2+n^2}\cos m(x-\alpha)\cos n(y-\beta)\,d\alpha\,d\beta.\end{aligned}\right.$$

En posant

$$(2)\quad\left\{\begin{aligned}m&=u\cos\omega, & n&=u\sin\omega,\\ x-\alpha&=\rho\cos\theta, & y-\beta&=\rho\sin\theta,\end{aligned}\right.$$

on devra, dans la formule (1), substituer $u\,d\omega\,du$ à $dm\,dn$ et les limites de u, ω seront respectivement $0,\infty$, et $0,\frac{\pi}{2}$; on obtiendra ainsi

$$\varphi=\frac{\sqrt{g}}{2\pi^2}\int_0^\infty du\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\omega\int\int f(\alpha,\beta)e^{-uz}\left\{\begin{matrix}\cos[u\rho\cos(\omega-\theta)]\\ +\cos[u\rho\cos(\omega+\theta)]\end{matrix}\right\}\sin t\sqrt{gu}\,.\sqrt{u}\,d\alpha\,d\beta.$$

Cette valeur est indépendante de l'angle θ que l'intégration

---

[1] En considérant y comme un paramètre arbitraire, on a

$$f(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty dm\int f(\alpha,y)\cos m(x-\alpha)\,d\alpha,$$

et de même

$$f(\alpha,y)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty dn\int f(\alpha,\beta)\cos n(y-\beta)\,d\beta,$$

d'où la formule du texte.

par rapport à ω fera disparaître, car on a

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big\{\cos[u\rho\cos(\omega-\theta)]+\cos[u\rho\cos(\omega+\theta)]\Big\}\,d\omega$$
$$=\Big\{-\cos[u\rho\cos(\omega-\theta)]+\cos[u\rho\cos(\omega+\theta)]\Big\}_{\omega=0}^{\omega=\frac{\pi}{2}}=0.$$

Il est donc permis de faire $\theta=0$, d'où

$$(3)\qquad \varphi=\frac{\sqrt{g}}{\pi^2}\int_0^{\infty}du\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-uz}\cos(u\rho\cos\omega)\,d\omega\iint f(\alpha,\beta)\sin t\sqrt{gu}\,.\sqrt{u}\,d\alpha\,d\beta.$$

Posons

$$(4)\qquad \begin{cases} Z=\displaystyle\int_0^{\infty}du\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-uz}\cos(u\rho\cos\omega)\,d\omega \\ \quad=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\omega\int_0^{\infty}e^{-uz}\cos(u\rho\cos\omega)\,du. \end{cases}$$

Une double intégration par partie donne

$$\int_0^{\infty}e^{-uz}\cos(u\rho\cos\omega)\,du=\frac{z}{z^2+\rho^2\cos^2\omega},$$

par suite,

$$(5)\qquad Z=z\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\omega}{z^2+\rho^2\cos^2\omega}=\frac{\pi}{2\sqrt{z^2+\rho^2}}.$$

On remarquera que la formule (4) conduit à

$$(6)\qquad \int_0^{\infty}u^n\,du\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-uz}\cos(u\rho\cos\omega)\,d\omega=(-1)^n\frac{\partial^n Z}{\partial z^n}.$$

La surface immergée du corps solide peut être considérée comme se confondant avec son paraboloïde osculateur

$$z'_0=h\left(1-\frac{x^2}{l^2}-\frac{y^2}{l'^2}\right)=f(x,y),$$

h étant la flèche et $l>l'$ les demi-axes de la section elliptique à *fleur d'eau*.

Soient A, B le volume et le moment d'inertie par rapport à Oz du segment solide immergé; on a

$$(7)\quad \begin{cases} \iint f(x,y)\,dx\,dy = A, & \iint f(x,y)(x^2+y^2)\,dx\,dy = B, \\ \iint f(x,y)\,dx\,x\,dy = 0, & \iint f(x,y)\,y\,dx\,dy = 0. \end{cases}$$

Premiers mouvements du liquide à la suite de l'ébranlement. — Si, dans la formule (3), on substitue le développement

$$\sqrt{u}\sin t\sqrt{gu} = ut\sqrt{g} - \frac{u^2(t\sqrt{g})^3}{2.3} + \frac{u^3(t\sqrt{g})^5}{2.3.5} - \ldots,$$

et, si l'on a égard à la relation (6), on obtient,

$$\varphi = -\frac{gt}{\pi^2}\iint\left[\frac{\partial Z}{\partial z} + \frac{gt^2}{2.3}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + \frac{g^2t^4}{2.3.5}\frac{\partial^3 Z}{\partial z^3} + \ldots\right] f(\alpha,\beta)\,d\alpha\,d\beta.$$

D'après la valeur (5), la série entre crochets sera d'autant plus convergente que $\frac{gt^2}{\sqrt{z^2+\rho^2}}$ sera plus petit. Mais, quelque petit que soit t, la série sera en défaut pour des points de l'étendue superficielle de l'ébranlement; car, comme $z = 0$, ρ s'annulera dans cette étendue.

S'il s'agit d'un point situé à une grande distance de l'ébranlement, on peut négliger α, β, respectivement devant x et y, et, si l'on pose

$$r = \sqrt{x^2+y^2},$$

on a

$$(5')\qquad Z = \frac{\pi}{2\sqrt{z^2+r^2}}.$$

Il vient alors

$$(8)\qquad \varphi = -\frac{Agt}{\pi^2}\left(\frac{\partial Z}{\partial z} + \frac{gt^2}{2.3}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + \frac{g^2t^4}{2.3.4.5}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^3} + \ldots\right).$$

On déduira de là les vitesses horizontales

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{x}{r}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{y}{r},$$

et leur résultante sera $\frac{\partial\varphi}{\partial r}$ et sera dirigée suivant r.

Pour connaître les lois des premières vitesses, on conservera seulement le premier terme de la série, ou on prendra

$$\varphi = \frac{Agtz}{2\pi(z^2+r^2)^{\frac{3}{2}}},$$

d'où

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = -\frac{3Agtzr}{2\pi(z^2+r^2)^{\frac{5}{2}}}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{Agt(r^2-2z^2)}{2\pi(r^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

La première de ces vitesses étant négative, les molécules commenceront à se mouvoir dans le sens horizontal en se rapprochant du lieu de l'ébranlement.

Lois que suit le mouvement lorsqu'il est sur le point de s'éteindre. — Nous devrons développer φ suivant les puissances négatives de t.

Nous poserons

$$z + i\rho\cos\omega = k, \qquad z - i\rho\cos\omega = k'$$

et nous continuerons à écrire

$$\int_0^\infty e^{-u^2k}\sin ut\sqrt{g}\,du = Y, \qquad \int_0^{-\infty} e^{-u^2k'}\sin ut\sqrt{g}\,du = Y',$$

d'où

$$\int_0^\infty e^{-u^2k}\sin ut\sqrt{g}\,u^2\,du = -\frac{1}{g}\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2},$$

$$\int_0^\infty e^{-u^2k'}\sin ut\sqrt{g}\,u^2\,du = -\frac{1}{g}\frac{\partial^2 Y'}{\partial t^2}.$$

L'équation (3) devient alors, après y avoir remplacé u par u^2,

$$(9) \qquad \varphi = -\frac{1}{\pi^2\sqrt{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega \iint\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 Y'}{\partial t^2}\right) f(\alpha, \beta)\,d\alpha\,d\beta.$$

Si l'on excepte les points de la surface et ceux qui en sont très voisins, nous avons, d'après le n° 76,

$$Y = \frac{1}{t\sqrt{g}}\left[1 + \frac{2k}{gt^2} + 1.3\left(\frac{2k}{gt^2}\right)^2 + 1.3.5\left(\frac{2k}{gt^2}\right)^3 + \ldots\right];$$

d'où, en remettant pour k et k' leurs valeurs,

$$Y + Y' = \frac{2}{t\sqrt{g}}\left[1 + \frac{2z}{gt^2} + \frac{12(z^2 - \rho^2\cos^2\omega)}{g^2t^4} + \frac{120(z^3 - 3z\rho\cos\omega)}{g^3t^6} + \ldots\right].$$

En multipliant par $d\omega$, intégrant de $\omega = 0$ à $\omega = \frac{\pi}{2}$ et différentiant deux fois par rapport à t, on obtient

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 Y'}{\partial t^2}\right)d\omega = \frac{\pi}{t^3\sqrt{g}}\left[1 + \frac{12z}{gt^2} + \frac{180\left(z^2 - \frac{\rho^2}{2}\right)}{g^2t^4} + \ldots\right],$$

expression dans laquelle on devra remplacer ρ^2 par

$$\rho^2 = x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2.$$

Nous avons donc, en ayant égard aux formules (7),

$$\varphi = -\frac{2A}{\pi g t^2} - \frac{24Az}{\pi g^2 t^5} - 180\frac{[(2z^2 - x^2 - y^2)A - B]}{\pi g^3 t^7} - \ldots;$$

d'où, si t est suffisamment grand, .

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\frac{24A}{\pi g^2 t^5},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{360Ay}{\pi g^3 t^7},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{360Ax}{\pi g^3 t^7}.$$

On voit ainsi que, si le temps écoulé est très considérable, le mouvement horizontal des molécules est insensible par rapport à leur mouvement vertical. La vitesse finale verticale est indépendante de leurs coordonnées et varie en raison inverse de la cinquième puissance du temps. Comme elle est négative, chaque molécule achèvera son mouvement en s'élevant verticalement, ce qui est l'inverse de ce qui a lieu dans le cas d'un canal.

Nouvelle forme sous laquelle peut se mettre la fonction φ. — La formule (3) peut s'écrire ainsi

$$\varphi = \frac{h\sqrt{g}}{\pi^2}\int_0^\infty du\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega\iint\left(1 - \frac{\alpha^2}{l^2} - \frac{\beta^2}{l'^2}\right)e^{-zu}\cos(u\rho\cos\omega)\sin t\sqrt{gu}.\sqrt{u}\,d\alpha\,d\beta.$$

La double intégration relative à α, β ne devra s'étendre qu'aux valeurs de ces coordonnées qui répondent à des points compris dans l'aire de l'ellipse de fleur d'eau

$$\frac{\alpha^2}{l^2} + \frac{\beta^2}{l'^2} = 1.$$

Pour avoir égard à ces limites, substituons à α, β les variables s et ψ définies par

$$\alpha = ls\cos\psi, \qquad \beta = l's\cos\psi;$$

les limites de s seront o et 1, celles de ψ, o et 2π ; $d\alpha\, d\beta$ devra être remplacé par $ll's\, ds\, d\psi$: on aura ainsi

$$(10) \quad \varphi = \frac{hll'\sqrt{g}}{\pi^2}\int_0^\infty du \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega \int_0^1 ds \int_0^{2\pi} (1-s^2)e^{-zu}\cos(u\rho\cos\omega)\sin t\sqrt{gu}.s\sqrt{u}\, d\psi.$$

Si l'on pose

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$

on a

$$\rho^2 = r^2 - 2rs(l\cos\theta\cos\psi + l'\sin\theta) + s^2(l^2\cos^2\psi + l'^2\sin^2\psi);$$

d'où, en développant suivant les puissances de $\frac{1}{r}$,

$$(11) \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{r} + \frac{s}{r^2}(l\cos\theta\cos\psi + l'\sin\theta\sin\psi) + \ldots.$$

Propagation des ondes à la surface. — On ne considérera que des points très éloignés de la surface, ce qui revient à supposer que $\frac{r}{l}$, $\frac{r}{l'}$ sont très grands.

Premier cas : *Le temps écoulé n'est pas encore très considérable.* — La formule (5′) donne, par un développement en série,

$$Z = \frac{\pi}{2r}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{z^2}{r^2} + \frac{1.3}{2.4}\frac{z^4}{r^4} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{z^6}{r^6} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\frac{z^8}{r^8} - \ldots\right),$$

et la formule (8), qui reçoit ici son application, nous donnera, pour $z = 0$,

$$\varphi = \frac{A}{2\pi}\left(\frac{1}{2.3}\frac{g^2t^3}{r^3} - \frac{(1.3)^2}{2.3.4.5.6.7}\frac{g^4t^7}{r^5} + \frac{(1.3.5)^2}{2.3.4.5.6.7.8.9}\frac{g^6t^9}{r^7} - \ldots\right),$$

et, en posant

$$\left(\frac{gt^2}{2r}\right)^2 = p,$$

on a

$$z' = \frac{1}{g}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{z=0} = \frac{A\sqrt{p}}{2\pi r^2}\left[1 + \sum_1 \frac{(-1)^n p^n}{2^n(1.2.3\ldots n)(2n+3)(2n+5)\ldots(4n+1)}\right].$$

Si l'on remarque que

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{2}{r}p,$$

l'équation $\frac{\partial z'}{\partial r} = 0$, qui donnera les valeurs du rayon r correspondant aux maxima de z' relatifs à ce rayon, sera

$$(12) \quad 3 - \frac{p}{1.2} + \sum_2 \frac{(-1)p^n}{2^n(1.2.3\ldots n)(2n+5)\ldots(4n+1)} = 0.$$

Le nombre des racines p_i de cette équation est infini; mais on doit rejeter toutes les valeurs trop grandes de p, puisque $\frac{gt^2}{r}$ est censé ne pas être très grand.

Pour chaque racine p_i de cette équation, on aura

$$r = \frac{gt^2}{2\sqrt{p_i}}.$$

L'onde formée par deux maxima consécutifs s'élargira proportionnellement au carré du temps; pour cette raison et à cause de l'abaissement rapide de leurs sommets, les ondes de cette espèce ne seront pas trop apparentes. Néanmoins nous déterminerons la vitesse des deux sommets qui précèdent tous les autres et qui répondent aux deux plus petites racines de l'équation (12).

Nous avons

$$r_1 = 0{,}3672\frac{gt^2}{2}, \quad z'_1 = 0{,}1567\frac{A}{r_1^2} = 4{,}6472\frac{A}{g^2t^4} \quad \text{pour } p_1 = 7{,}4152,$$

$$r_2 = 0{,}1289\frac{gt^2}{2}, \quad z'_2 = -2{,}1766\frac{A}{r_2^2} = -524{,}04\frac{A}{g^2t^4} \quad \text{pour } p_2 = 60{,}19.$$

Second cas : $\frac{gt^2}{r}$ *est très grand.* — On admet que $\frac{gt^2}{r}$ est du même ordre de grandeur que $\frac{r}{l}$, $\frac{r}{l'}$.

On déduit de l'équation (10)

$$z' = \frac{hll'}{\pi^2}\int_0^\infty du \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega \int_0^1 ds \int_0^{2\pi} (1-s^2)\cos(u\rho\cos\omega)\cos t\sqrt{gu}.su\,d\psi.$$

En remplaçant, dans l'équation (11) du n° 76, $x-\alpha$ par $\rho\cos\omega$ et m par u, on obtient

$$\int_0^\infty \cos(u\rho\cos\omega)\cos t\sqrt{gu}.du = \frac{gt^2}{2\rho^2\cos^2\omega}\int_0^1 \cos\frac{gt^2(1-v^2)}{4\rho\cos\omega}dv;$$

d'où, en différentiant deux fois par rapport à t,

$$\int_0^\infty \cos(u\rho\cos\omega)\cos t\sqrt{gu}.u\,du$$
$$= -\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{t^2}{2\rho^2\cos^2\omega}\int_0^1 \cos\frac{gt^2(1-v^2)}{4\rho\cos\omega}dv\right],$$

et l'on a, par suite,

$$z' = -\frac{hll'}{2\pi^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^1\int_0^1 ds\,dv\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega\int_0^{2\pi}\frac{1-s^2}{\rho^2\cos^2\omega}\cos\frac{gt^2(1-v^2)}{4\rho\cos\omega}st^2\,d\psi.$$

En remplaçant $x-\alpha$ par $\rho\cos\omega$ dans l'équation (17) du n° 76, on trouve, en ne conservant que la première puissance négative de gt^2,

$$\frac{gt^2}{\rho^2\cos^2\omega}\int_0^1 \cos\frac{gt^2(1-v^2)}{4\rho\cos\omega}dv$$
$$= \frac{t\sqrt{2g\pi}}{2(\rho\cos\omega)^{\frac{3}{2}}}\left(\cos\frac{gt^2}{4\rho\cos\omega}+\sin\frac{gt^2}{4\rho\cos\omega}\right)-\frac{4}{gt^2}.$$

On a donc

$$z' = -\frac{hll'}{2\pi\sqrt{2g\pi}}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^1 ds\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega$$
$$\times\int_0^{2\pi}\left(\cos\frac{gt^2}{4\rho\cos\omega}+\sin\frac{gt^2}{4\rho\cos\omega}\right)\frac{(1-s^2)ts}{(\rho\cos\omega)^{\frac{3}{2}}}d\psi+\frac{3hll'}{g^2t^4}.$$

Si l'on pose

$$\frac{1}{\cos\omega} = 1 + x^3,$$

les limites de x seront zéro et l'infini, et l'on a

$$\frac{d\omega}{\cos^{\frac{3}{2}}\omega} = 2\sqrt{\frac{1+x^2}{2+x^2}}\,dx = \sqrt{2}\left(1 + \frac{\sqrt{2}\sqrt{1+x^2} - \sqrt{2+x^2}}{\sqrt{2+x^2}}\right)dx$$
$$= \sqrt{2}\,dx + x\mathrm{X}\,dx,$$

en faisant

$$\mathrm{X} = \frac{2x}{(2\sqrt{1+x^2} + \sqrt{2}\sqrt{2+x^2})\sqrt{2+x^2}},$$

fonction qui s'annule pour $x = 0$ et $x = \infty$.

Il résulte de là que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\frac{gt^2}{4\rho\cos\omega}\,\frac{d\omega}{\cos^{\frac{3}{2}}\omega}$$
$$= \sqrt{2}\int_0^\infty \cos\frac{gt^2(1+x^2)}{4\rho}\,dx + 2\int_0^\infty \cos\frac{gt^2(1+x^2)}{4\rho}\,x\mathrm{X}\,dx.$$

On a d'abord

$$\int_0^\infty \cos\frac{gt^2(1+x^2)}{4\rho}\,dx = \left(\cos\frac{gt^2}{4\rho} - \sin\frac{gt^2}{4\rho}\right)\sqrt{\frac{\pi\rho}{2gt^2}};$$

puis, en intégrant par partie,

$$\int_0^\infty \cos\frac{gt^2(1+x^2)}{4\rho}\,x\mathrm{X}\,dx = -\frac{2\rho}{gt^2}\int_0^\infty \sin\frac{gt^2(1+x^2)}{4\rho}\,\frac{d\mathrm{X}}{dx}\,dx.$$

D'ailleurs $\frac{d\mathrm{X}}{dx}$ est de la forme

$$\frac{d\mathrm{X}}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{2}} + 2\mathrm{X}',$$

X' étant une fonction qui, comme X, s'annule pour $x = 0$ et $x = \infty$. On a donc aussi

$$\int_0^\infty \sin\frac{gt^2(1+x^2)}{4\rho}\,\frac{d\mathrm{X}}{dx}\,dx$$
$$= \frac{1}{4}\left(\cos\frac{gt^2}{4\rho} + \sin\frac{gt^2}{4\rho}\right) - \frac{2\rho}{gt^2}\int_0^\infty \cos\frac{gt^2(1+x^2)}{4\rho}\,\frac{d\mathrm{X}'}{dx}\,dx,$$

et, en continuant cette suite d'opérations, l'intégrale relative à ω se trouvera développée suivant les puissances de la petite quantité $\sqrt{\frac{\rho}{gt^2}}$. En ne conservant que le premier terme de la série, on aura simplement

$$\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\frac{gt^2}{4\rho\cos\omega}\,\frac{d\omega}{\cos^{\frac{3}{2}}\omega} = \left(\cos\frac{gt^2}{4\rho} - \sin\frac{gt^2}{4\rho}\right)\sqrt{\frac{\pi\rho}{gt^2}}.$$

On trouvera de même

$$\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\frac{gt^2}{4\rho\cos\omega}\,\frac{d\omega}{\cos^{\frac{3}{2}}\omega} = \left(\cos\frac{gt^2}{4\rho} + \sin\frac{gt^2}{4\rho}\right)\sqrt{\frac{\pi g}{gt^2}}.$$

On a donc enfin

$$z' = -\frac{hll'}{\pi g\sqrt{2}}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^1 ds\int_0^{2\pi} \cos\frac{gt^2}{4\rho}\,\frac{(1-s^2)s}{\rho}\,d\psi + \frac{3hll'}{g^2t^4}.$$

Reportons-nous maintenant à la série (11), que nous limiterons à son second terme, et posons

$$l\cos\theta = \sqrt{l^2\cos^2\theta + l'^2\sin^2\theta}\,\cos\theta',$$
$$l'\sin\theta = \sqrt{l^2\cos^2\theta + l'^2\sin^2\theta}\,\sin\theta'.$$

Nous aurons

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{r} + s\,\frac{\sqrt{l^2\cos^2\theta + l'^2\sin^2\theta}}{r^2}\cos(\psi - \theta').$$

En dehors du cosinus qui entre dans z', nous prendrons $\rho = r$ et nous poserons

$$k = gt^2\,\frac{\sqrt{l^2\cos^2\theta + l'^2\sin^2\theta}}{4r^2}.$$

Comme $\frac{l}{r}$, $\frac{l'}{r}$ sont très petits et $\frac{gt^2}{r}$ très grand, k pourra avoir telle valeur qu'on voudra.

Nous pouvons maintenant écrire

$$z' = -\frac{hll'}{\pi g r\sqrt{2}}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^1 ds\int_0^{2\pi}\cos\left[\frac{gt^2}{4r} + ks\cos(\psi-\theta')\right] \times (1-s^2)s\,d\psi + \frac{3hll'}{g^2t^4}.$$

En suivant la même marche qu'au début du numéro actuel, on établira que $\frac{\partial z'}{\partial\theta'} = 0$; en faisant en conséquence $\theta' = 0$, on aura

$$z' = -\frac{hll'}{\pi g r\sqrt{2}}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left\{\begin{array}{l}\cos\frac{gt^2}{4r}\int_0^1 ds\int_0^{2\pi}\cos(ks\cos\psi)(1-s^2)s\,d\psi \\ -\sin\frac{gt^2}{4r}\int_0^1 ds\int_0^{2\pi}\sin(ks\cos\psi)(1-s^2)s\,d\psi\end{array}\right\} + \frac{3hll'}{g^2t^4}.$$

La seconde intégrale est nulle entre $\psi = 0$ et $\psi = 2\pi$, et l'on peut prendre la première entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ en quadruplant le résultat, d'où

$$z' = -\frac{2\sqrt{2}\,hll'}{\pi g r}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\cos\frac{gt^2}{4r}\int_0^1 ds\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(ks\cos\psi)(1-s^2)s\,d\psi\right] + \frac{3hll'}{g^2t^4}.$$

Si l'on effectue la double différentiation par rapport à t et que, en dehors des sinus et des cosinus, on mette

$$gt^2 = \frac{4kr^2}{\sqrt{l^2\cos^2\theta + l'^2\sin^2\theta}},$$

on obtiendra des termes en $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{r^2}$, $\frac{1}{r^3}$; mais on ne conservera que la puissance de $\frac{1}{r}$ et l'on supprimera le terme $\frac{3hll'}{g^2t^4}$ qui est de l'ordre de $\frac{1}{r^4}$. Alors on aura

$$(13)\qquad z' = \frac{2\sqrt{2}\,hll'}{\pi r\sqrt{l^2\cos^2\theta + l^2\sin^2\theta}}\cos\frac{gt^2}{4r}\int_0^1 ds\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(ks\cos\psi)(1-s^2)s\,d\psi.$$

L'intégrale relative à s pourrait s'obtenir immédiatement,

mais il sera plus simple de faire

$$s\cos\psi = a, \qquad s\sin\psi = b,$$

en remplaçant $s\,ds\,d\psi$ par $da\,db$. L'intégrale relative aux nouvelles variables devra s'étendre à tous les éléments d'un quart de cercle d'un rayon égal à l'unité; il faudra donc intégrer de $b = 0$ à $b = \sqrt{1 - a^2}$ et depuis $a = 0$ jusqu'à $a = 1$. On aura donc

$$\int_0^1 ds \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(ks\cos\varphi)(1 - s^2)\,s\,d\psi = \int\int (1 - a^2 - b^2)\cos ka\,da\,db$$
$$= \frac{2}{3}\int_0^1 (1 - a^2)^{\frac{3}{2}}\cos ka\,da$$

et

$$z' = \mathrm{K}\cos\frac{gt^2}{4r},$$

en posant

$$\mathrm{K} = \frac{4\sqrt{2}\,ll'}{3\pi r\sqrt{l^2\cos^2\theta + l'^2\sin^2\theta}}\int_0^1 (1 - a^2)^{\frac{3}{2}}\cos ka\,da.$$

Comme $\frac{gt^2}{4r}$ est censé très grand, le facteur K qui ne dépend que de k variera bien plus lentement que $\cos\frac{gt^2}{4r}$ qui passe d'un maximum positif à un maximum négatif dans un intervalle de temps pendant lequel K reste sensiblement constant. Il résulte de là que :

1° Chaque molécule de la surface exécute des oscillations verticales dont l'amplitude 2K varie avec t pour le même point, et varie à un même instant d'un point à un autre.

2° Si τ est la durée d'une oscillation, dont on négligera le carré, on a

$$\frac{g(t + \tau)^2}{4r} - \frac{gt^2}{4r} = \pi,$$

d'où

$$\tau = \frac{2\pi r}{gt}.$$

3° Tous les points situés à la même distance r du centre d'ébranlement font au même instant leurs oscillations dans le

même temps. Mais ces oscillations n'ont pas toutes la même amplitude, puisque K renferme θ. Si de ce centre on décrit deux cercles très rapprochés ayant pour rayons r et $r+\lambda$, et si l'on détermine λ au moyen de

$$\frac{gt^2}{4r} - \frac{gt^2}{4(r+\lambda)} = \pi,$$

les deux points de ces deux circonférences situés sur une même direction polaire exécuteront leurs oscillations en sens inverse, c'est-à-dire que, lorsque l'un atteindra sa plus grande élévation, l'autre atteindra sa plus basse position. La surface liquide peut être partagée en une suite de zones semblables qui formeront une série d'ondes circulaires mobiles, en apparence, à cette surface. La largeur λ de l'onde correspondant au même rayon sera à très peu près

$$\lambda = \frac{4\pi r^2}{gt^2},$$

et en un même endroit les ondes se rétréciront à mesure que le temps augmentera.

4° On a

$$\tau = \pi\sqrt{\frac{\lambda}{\pi g}};$$

donc, comme dans le cas d'un canal, la durée d'une oscillation est proportionnelle à la racine carrée de la largeur de l'onde.

5° L'angle θ étant donné, on peut suivre dans le plan vertical qu'il détermine le mouvement apparent des points dont les oscillations sont nulles et de ceux pour lesquels l'amplitude 2K est un maximum par rapport à r.

Les premiers de ces points seront déterminés par l'équation $K = 0$ ou

$$(14) \qquad \int_0^1 (1-a^2)^{\frac{3}{2}} \cos ka\, da = 0.$$

Relativement aux seconds, si l'on observe que $\frac{\partial k}{\partial r} = -\frac{2k}{r}$,

l'équation $\frac{\partial K}{\partial r} = 0$ devient

$$(14') \quad 3\int_0^1 (1-a^2)^{\frac{3}{2}} \cos ka\, da - 2k\int_0^1 (1-a^2)^{\frac{3}{2}} \sin ka . a\, da = 0.$$

Pour une racine quelconque k_i de l'une ou l'autre de ces équations, on aura

$$(15) \qquad r = t\sqrt{g}\,\frac{\sqrt[4]{l^2\cos^2\theta + l'^2\sin^2\theta}}{2\sqrt{k_i}}.$$

Il résulte de là que le mouvement de propagation des points de cette espèce est uniforme. L'amplitude maximum qui répond à k_i varie en raison inverse de r et, par suite, de t. La moitié de l'amplitude étant l'ordonnée des points auxquels elle répond, les ondes considérées doivent être, à de grandes distances de l'ébranlement, beaucoup plus sensibles que celles qui se propagent d'un mouvement accéléré, puisque les hauteurs de celles-ci sont en raison inverse du carré de la distance ou de la quatrième puissance du temps.

6° Comme la vitesse apparente des points dont il s'agit dépend de l'angle θ, excepté dans le cas de $l' = l$, on voit que, à un instant donné, ces points ne doivent pas être rangés sur des cercles concentriques au centre d'ébranlement. Ainsi les points dont les oscillations sont nulles forment à la surface une succession de courbes semblables qui se propagent uniformément et dont (15) est l'équation polaire, soit, en coordonnées rectangulaires,

$$(x^2+y^2)^3 = \frac{gt^2}{16k_i}(l^2x^2 + l'^2y^2).$$

Elles forment des ovales allongés dans le sens du plus grand diamètre de l'ébranlement.

7° C'est dans cette direction que les oscillations maxima se propagent avec la plus grande vitesse, et dans le sens du plus petit diamètre qu'elles se propagent le plus lentement. Les amplitudes dans les deux directions sont proportionnelles aux diamètres correspondants.

Cas où le corps immergé est de révolution autour d'un axe vertical. — On a $l = l'$. Les points dont les oscillations sont nulles, ainsi que ceux qui répondent aux oscillations maxima, se trouvent sur des cercles concentriques mobiles. Les premiers cercles partagent les ondes en groupes constituant chacun une onde dentelée. Les ondes dentelées s'élargissent proportionnellement au temps à mesure qu'elles se propagent. Les mouvements des cercles qui la terminent sont compris dans l'équation

$$r = \frac{t\sqrt{gl}}{2\sqrt{k_i}},$$

k_i étant une racine de l'équation

$$(16) \qquad \int_0^1 (1-a^2)^{\frac{3}{2}} \cos ka\, da = \mathrm{P} = 0.$$

Les cercles correspondant aux oscillations maxima se propagent aussi avec une vitesse constante, et l'on peut regarder cette vitesse comme étant celle des ondes dentelées auxquelles ils appartiennent. Les valeurs de k_i seront données par l'équation (14'), qui peut se mettre sous la forme

$$(17) \qquad 3\mathrm{P} + 2k\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial k} = 0.$$

Nous désignerons par

$$\mathrm{K}' = 2\mathrm{K} = \frac{8\sqrt{2}\, hlk_i \mathrm{P}}{3\pi r}$$

l'amplitude de ces oscillations.

Nous allons maintenant chercher à déterminer, par approximation, les plus petites racines k_1, k_2 de l'équation (17), lesquelles répondent aux ondes dentelées qui se propagent avec la plus grande vitesse.

En faisant

$$\mathrm{A}_n = \int_0 (1-a^2)^{\frac{3}{2}} a^{2n}\, da = \frac{2n-1}{2(n+2)}\mathrm{A}_{n-1} = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots(n+2)}\,\frac{2\pi}{n+3},$$

on a, en développant en série suivant les puissances de k,

$$P = A_0 - A_1 \frac{k^2}{2} + \frac{A_2 k^4}{2.3.4} - \frac{A_3 k^6}{2.3.4.5.6} + \ldots$$
$$= \frac{3\pi}{8}\left[\frac{1}{2} + \sum_1 \frac{(-1)^n}{(1.2.3\ldots n)^2(n+1)(n+2)}\left(\frac{k^2}{4}\right)^n\right].$$

En faisant $\frac{k^2}{4} = p$, l'équation (17) devient

$$(18) \qquad \frac{3}{2} - \frac{7p}{2.3} + \sum_2 \frac{(-1)^n(3+4n)p^n}{(1.2.3\ldots n)^2(n+1)(n+2)} = 0.$$

On a

1° $$p_1 = 1,8628;$$

d'où

$$r_1 = 0,3027\, t\sqrt{gt}, \qquad K' = 0,9788\frac{hl}{r} = 3,2364\frac{h}{t}\sqrt{\frac{l}{g}},$$
$$\tau = 1,9015\sqrt{\frac{l}{g}}, \qquad \lambda = 1,1509\, l;$$

2° $$p_2 = 11,5;$$

d'où

$$r_2 = 0,1920\, t\sqrt{gl}, \qquad K' = 0,2609\frac{hl}{r} = 1,3588\frac{h}{t}\sqrt{\frac{l}{g}}.$$
$$\tau = 1,2069\sqrt{\frac{l}{g}}, \qquad \lambda = 0,4632\, l.$$

La vitesse relative à r_1 n'est environ que les $\frac{5}{6}$ de celle qui répond à un canal. Celle qui se rapporte à r_2 est à peu près la même dans les deux cas.

Biot a observé le temps que met l'onde définie par p_1 à parcourir 1^m. En faisant donc $r_1 = 1$, on a

$$t = \frac{3,3036}{\sqrt{gl}}.$$

La flèche du segment plongé a été, dans tous les cas, égale à $0^m,01$.

On a le Tableau de comparaison suivant :

Corps plongés.	l.	t en secondes observé.	t en secondes calculé.
	m		
Sphère de rayon $0^m,05$.....	0,03	5	6,09
Sphère de rayon $0^m,10$.....	0,0436	4	5,05
Paraboloïde.....	0,02	7	7,46
Ellipsoïde dont l'axe vertical est double de l'axe horizontal...	0,015	8	8,64

Il nous semble que la concordance approximative entre les résultats d'expériences sommaires et du calcul où l'on a fait tant d'abstractions doit paraître suffisante.

APPENDICE.

CINÉMATIQUE PURE.

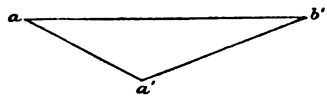
CHAPITRE PREMIER.

DE LA VITESSE D'UN POINT.

1. *Sur la composition des vitesses.* — On établit généralement la règle de la composition des vitesses en partant de la considération du mouvement uniforme d'un point sur une droite qui est animée d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme. Il nous semble que, à cette manière de traiter la question, on doit préférer la suivante :

1° *Composition de deux vitesses.* — Supposons que, nous trouvant entraîné dans le mouvement d'un système invariable (S) [1], nous observions un point mobile m. Soient a

Fig. 18.



(*fig.* 18) le point de (S) où se trouve m à l'instant t, a' la position que prend ce point au bout du temps $t+dt$; $v=\frac{aa'}{dt}$

[1] On peut considérer un point quelconque comme faisant partie d'un système invaviable en le supposant relié à ce système par des droites de longueurs fixes; de sorte qu'on peut regarder le système comme indéfini ou constituant un milieu.

la vitesse, dite d'*entraînement*, de a; à l'instant $t+dt$, m sera venu en b' et aura ainsi décrit pour l'observateur l'élément $a'b'$ avec la vitesse *relative* $v'=\frac{a'b'}{dt}$. On voit alors sans peine que la *vitesse absolue* $V=\frac{ab'}{dt}$ est représentée par la diagonale du parallélogramme construit sur les droites qui représentent respectivement les vitesses composantes v et v'.

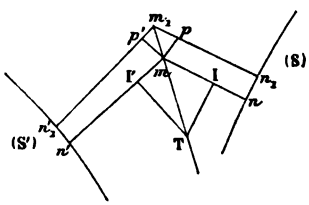
2° *Composition de trois vitesses.* — Supposons que (S) se déplace par rapport à un autre système invariable (S'), et soit v'' la vitesse du point de ce dernier système où se trouve actuellement m; la vitesse relative du point m par rapport à (S') sera la résultante v_1 de v, v'; la vitesse absolue de ce point sera la résultante de v_1 et v'', d'où le parallélépipède des vitesses.

3° *Composition d'un nombre quelconque de vitesses.* — On peut admettre que (S') soit mobile par rapport à un autre système (S''), celui-ci par rapport à un troisième système (S'''), et ainsi de suite. On déduira de là et de ce qui précède le polygone des vitesses.

2. *Construction de la tangente à quelques courbes.*

(*a*) *Courbe plane* (σ), *définie par la condition que les distances de chacun m de ses points à deux courbes données* (S) *et* (S'), *comprises dans le même plan, aient entre elles une relation déterminée.* — Soient (*fig.* 19)

Fig. 19.



$mn=r$, $mn'=r'$ les distances de m à (S), (S');
$f(r, r')=0$ la relation donnée;

$\overline{m_1 n_1} = r + dr$, $\overline{m_1 n'_1} = r' + dr'$ les distances à (S), (S') d'un point m_1 de (σ) infiniment voisin de m;

p, p' les projections de m sur $m_1 n_1$, $m_1 n'_1$;

mT le prolongement de $m_1 m$ ou la tangente en m à (σ);

α, α' les angles $\widehat{\mathrm{T}mn}$, $\widehat{\mathrm{T}mn'}$, respectivement égaux à $\widehat{\mathrm{T}m_1 n_1}$, $\widehat{\mathrm{T}m_1 n'_1}$ aux quantités du premier ordre près.

Nous avons

$$\overline{m_1 p} = dr, \qquad \overline{m_1 p'} = dr',$$

puis

$$\overline{mm_1} = \frac{m_1 p}{\cos \widehat{mm_1 n_1}} = \frac{dr}{\cos\alpha}, \qquad \overline{mm_1} = \frac{dr'}{\cos\alpha'};$$

d'où

$$(1) \qquad \frac{dr}{\cos\alpha} = \frac{dr'}{\cos\alpha'}.$$

Nous avons aussi

$$\frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial r'} dr' = 0;$$

par suite,

$$(2) \qquad \frac{1}{\cos\alpha} \frac{\partial f}{\partial r} = -\frac{1}{\cos\alpha'} \frac{\partial f}{\partial r'}.$$

Portons de m vers n une longueur mI proportionnelle à $\sqrt{\frac{\partial f^2}{\partial r^2}}$, et de m vers n' ou en sens inverse, selon que $\frac{\partial f}{\partial r}$, $\frac{\partial f}{\partial r'}$ seront de signes contraires ou de même signe, une longueur mI' proportionnelle à $\sqrt{\frac{\partial f^2}{\partial r'^2}}$; en vertu de l'équation (2), les perpendiculaires en I, I' à mn, mn' se couperont en un point T de la tangente à (σ), qui sera ainsi complètement déterminée.

Cas particuliers : 1° *Le rapport* $\frac{r'}{r}$ *est constant.* — En le représentant par $\frac{a}{c}$, l'équation (1) devient

$$\frac{c}{\cos\alpha} = \frac{a}{\cos\alpha'};$$

d'où

$$m\mathrm{I} = c, \qquad m\mathrm{I}' = a.$$

Si (S) se réduit à un point F et (S′) à une droite, le lieu des points m est une conique dont on peut ainsi construire la tangente, connaissant un foyer et la directrice. Comme conséquence, les angles α, α' sont égaux dans la parabole.

2° *La somme $r + r'$ est constante.* — On a $dr = -dr'$, et l'équation (1) donne

$$\alpha' = 180^\circ - \alpha.$$

On se trouve dans le cas de l'ellipse en supposant que (S), (S′) se réduisent à deux points F, F′.

3° *La différence $r - r'$ est constante ou $dr = dr'$.* — Alors

$$\alpha' = \alpha,$$

résultat qui s'applique à l'hyperbole lorsqu'on suppose que (S) et (S′) se réduisent à deux points.

3° *Le produit rr' est constant.* — On a

$$r'\,dr + r\,dr' = 0$$

et

$$\frac{r}{\cos\alpha} = -\frac{r'}{\cos\alpha'}.$$

On portera $mI = r$ de m vers n, $m'I' = r'$ sur le prolongement de $n'm$, et la tangente sera déterminée.

Si (S) et (S′) se réduisent à deux points, la courbe est l'ellipse de Cassini.

(*b*) *Tangente à une courbe plane définie par une équation polaire $r = f(\theta)$.* — Cette courbe peut être considérée comme étant décrite par un point m qui se meut sur le rayon Om avec la vitesse $\frac{dr}{dt}$ en même temps que ce rayon tourne autour de O avec la vitesse angulaire constante $\omega = \frac{d\theta}{dt}$. Comme cette vitesse angulaire peut être choisie arbitrairement, on peut la supposer égale à l'unité, ce qui revient à prendre $t = \theta$.

La direction de la tangente sera donc celle de la diagonale du rectangle construit sur la longueur $mp = \frac{dr}{d\theta}$ portée sur le

prolongement de Om et sur $mn = r$, perpendiculaire à Om. On déduit de là que la tangente trigonométrique de l'angle formé par la tangente à la courbe avec le rayon vecteur r a pour expression

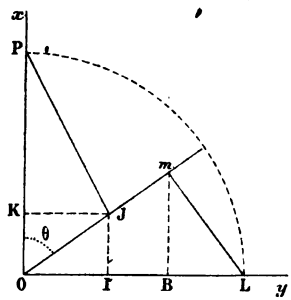
$$\frac{r}{\frac{dr}{d\theta}} = \frac{r\,d\theta}{dr}.$$

Si l'on considère le cas de la spirale d'Archimède $r = a\theta$, on a $mp = a$, $mn = r$; d'où l'on déduit géométriquement que la sous-normale polaire est constante.

(*c*) *Tangente à la quadratrice.* — La règle donnée par Dinostrate, pour définir cette courbe qu'il a imaginée, est assez compliquée, mais elle revient à la suivante :

Soient (*fig.* 20)

Fig. 20.



Ox, Oy deux axes rectangulaires;
θ l'angle polaire mOx;
a une constante.

La position du point m est définie par

$$y = a\theta = \overline{OB}, \qquad x = a\theta\cot\theta = mB.$$

Pour plus de simplicité, on prendra égale à l'unité la vitesse angulaire $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ ou $dt = d\theta$. On aura

$$\frac{dy}{d\theta} = a, \qquad \frac{dx}{d\theta} = a\cot\theta - \frac{a\theta}{\sin^2\theta} = a\cot\theta - \frac{y}{\sin^2\theta}.$$

Soient $\overline{OI} = a$ une longueur portée sur Oy à partir de l'origine; $\overline{IJ} = OK = a \cot\theta$ l'abscisse du point J de Om correspondant à l'ordonnée OI. On a

$$\frac{\overline{OB}}{\sin\theta} = \overline{Om},$$

et, si $\overline{mL}$ est la perpendiculaire en m à Om limitée à Oy et OP la longueur OL portée sur Ox,

$$\overline{OL} = \overline{OP} = \frac{\overline{Om}}{\sin\theta} = \frac{\overline{OB}}{\sin^2\theta} = \frac{y}{\sin^2\theta}.$$

Donc

$$\frac{dy}{d\theta} = \overline{JK}, \qquad \frac{dx}{d\theta} = \overline{OK} - \overline{OL} = \overline{OK} - \overline{OP} = -\overline{PK},$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\overline{JK}}{\overline{PK}}.$$

La tangente en m est, par suite, parallèle à JP.

CHAPITRE II.

MOUVEMENT GÉOMÉTRIQUE DES SYSTÈMES INVARIABLES.

3. *Application à la Géométrie de la théorie du mouvement d'une figure plane* (1) *dans son plan.* — Lorsque le déplacement d'une figure est complètement défini et que l'on sait, dans chacune de ses positions, déterminer son centre instantané de rotation, la normale au lieu décrit par un quelconque de ses points est la droite qui joint ce point au centre instantané.

Si l'une des conditions du déplacement de la figure consiste en ce que l'un déterminé de ses points est assujetti à décrire une courbe fixe donnée, le centre instantané se trouve sur la normale à cette courbe.

Supposons que l'une des conditions du déplacement soit qu'une courbe donnée, tracée dans le plan mobile de la figure, soit assujettie à passer par un point fixe, le centre instantané se trouvera sur la normale à la courbe en ce point.

Les considérations précédentes permettent de construire la normale à la conchoïde et à la cissoïde.

Si une des conditions du déplacement consiste en ce qu'une courbe tracée dans le plan de la figure reste constamment en contact avec une courbe fixe, le centre instantané se trouve sur la normale au point de contact des deux courbes. On reconnaît de cette manière que la normale au lieu décrit par un

(1) *Voir* le Chap. II de la Ire Partie du Tome I; nous renverrons au Tome III pour ce qui concerne le tracé et les propriétés des enveloppes des courbes planes.

angle constant, dont les côtés restent tangents à une courbe fixe, est le diamètre du cercle circonscrit au triangle formé par les tangentes et la corde.

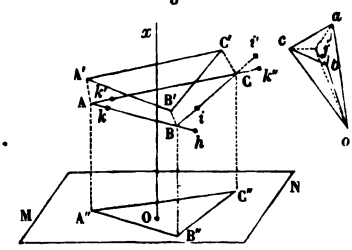
4. *Sur l'axe instantané de rotation et de glissement d'un système invariable libre.* — Nous avons établi l'existence de cet axe au n° 39 de la première Partie du Tome I, en nous appuyant sur la considération des rotations.

Nous allons donner ici la solution directe de cette question, due à Poncelet et qui est encore l'objet de quelques préférences.

La position dans l'espace d'un système invariable est définie par celles de trois quelconques de ses points; de sorte que l'on est ramené à la considération d'un triangle mobile dans l'espace. Les vitesses des trois sommets du triangle doivent remplir certaines conditions qu'il convient d'abord de faire connaître.

Soient (*fig.* 21) ABC, A'B'C' deux positions consécutives

Fig. 21.



du triangle; V, V', V'' les vitesses des sommets A, B, C; on a

$$AA' = V\,dt, \qquad BB' = V'\,dt, \qquad CC' = V''\,dt.$$

La projection de A'B' sur la direction du côté AB étant égale à ce côté, aux infiniment petits près du second ordre, les projections de AA', BB', par suite celles de V, V', sur la même direction, sont égales et de même sens. Donc :

Lorsqu'un triangle se meut dans l'espace, les projections des vitesses de deux sommets sur le côté qui les joint sont égales et de même sens.

On peut se donner V arbitrairement; soient Ak, Ak' ses projections sur AB, AC; Bh une longueur égale à Ak portée sur le prolongement de AB. La vitesse V′ de B pourra être représentée par toute droite partant de ce point et limitée au plan mené en h perpendiculairement à AB.

Soient

Bi la projection de V′ sur BC;
Ci' = Bi porté sur le prolongement de BC;
Ck'' = Ak' porté sur le prolongement de AC.

La vitesse V″ pourra être représentée par toute droite partant de C et aboutissant à l'intersection des plans en i', k'' menés perpendiculairement à BC et AC.

Cela posé, concevons que, par un point o choisi arbitrairement, on mène les droites oa, ob, oc égales et parallèles à V, V′, V″, et joignons le pied j de la perpendiculaire abaissée du point o sur le plan abc aux points a, b, c. Les vitesses V, V′, V″ peuvent être considérées comme les résultantes de la vitesse commune oj = U et des vitesses respectives aj, bj, cj, de sorte que, si l'on imprime au système ABC une vitesse égale et contraire à U, de manière à détruire cette dernière, il ne pourra plus se mouvoir que parallèlement à un plan MN lui-même parallèle au plan abc; son mouvement sera alors le même que celui de sa projection A″B″C″ sur ce plan, laquelle reste invariable pendant le temps dt, les vitesses des sommets A″, B″, C″ étant respectivement oj, bj, cj. Soit Ox la perpendiculaire au plan MN mené au centre instantané O de A″B″C″. Le mouvement actuel de ABC sera un mouvement gyratoire autour de Ox, auquel il faudra joindre la vitesse translatoire U qui a été supprimée. La droite Ox est ainsi l'axe instantané de rotation et de glissement.

Remarques. — 1° Si oa, ob, oc sont situés dans un même plan, la démonstration ci-dessus n'est pas en défaut; car le système ABC, ne pouvant se déplacer que parallèlement au plan aob, peut être considéré comme tournant à l'instant actuel autour d'un axe instantané perpendiculaire à ce plan; le glissement est alors nul.

2° La démonstration est réellement en défaut lorsque les

droites *oa*, *ob*, *oc* sont parallèles. Les chemins élémentaires AA′, BB′, CC′ sont égaux si leur direction n'est pas perpendiculaire au plan ABC et le mouvement se réduit à une translation. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi : le centre instantané de AB, par exemple, se trouvera sur la direction de cette droite; mais on peut substituer à A, par exemple, un autre point A_1 du plan ABA′B′ dont la vitesse ne soit plus parallèle à BB′. Alors on rentre dans le cas ci-dessus.

5. *Du roulement de deux corps solides l'un sur l'autre* (¹). — On est évidemment ramené à étudier le roulement d'une surface mobile (S) sur une surface fixe (S′).

Soient, à l'instant t,

O le point de contact des deux surfaces;
Oz la normale en ce point;
Ox, Oy deux axes rectangulaires tracés dans le plan tangent.

Pour que le système (S) roule sur (S′), il faut d'abord que la rotation instantanée rencontre le plan tangent xOy en un point infiniment voisin de l'origine O. Nous considérerons cette rotation comme la résultante de deux autres : une γ parallèle à Oz, et l'autre ε dont la position reste indéterminée.

Il faut ensuite qu'un point O_1 de (S) infiniment voisin de O et le plan tangent en ce point viennent respectivement coïncider avec un point O'_1 de (S′) et le plan tangent en ce dernier point.

En affectant de l'indice o les quantités qui se rapportent à l'origine, l'équation de (S) pour des points extrêmement voisins de O, et aux termes du troisième ordre près, est

$$(a) \qquad 2z = r_0 x^2 + 2s_0 xy + t_0 y^2,$$

et l'on a pour le point O_1

$$(a_1) \qquad 2z_1 = r_0 x_1^2 + 2s_0 x_1 y_1 + t_0 y_1^2.$$

(¹) Nous rappellerons les notations suivantes,

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \qquad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \qquad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \qquad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

en désignant par z une fonction des deux variables x, y.

Dans le temps dt, la rotation γ ne donnerait pour O_1 qu'un déplacement du second ordre, par suite négligeable, devant x_1 et y_1. Il est donc permis, du moins jusqu'à nouvel ordre, de faire abstraction de cette rotation.

En nous arrêtant aux termes du premier ordre, ce qui nous suffira dans ce qui suit, nous avons, pour le point O_1,

$$(b) \qquad p_1 = r_0 x_1 + s_0 y_1, \qquad q_1 = s_0 x_1 + t_0 y_1,$$

et, pour l'équation du plan tangent en ce point,

$$z - z_1 = p_1(x - x_1) + q_1(y - y_1)$$

ou, en ayant égard à (a_1) et (b),

$$(c) \qquad z = p_1 x + q_1 y - \frac{1}{2}(r_0 x_1^2 + 2 s_0 x_1 y_1 + t_0 y_1^2).$$

En accentuant les lettres p, q, r, s, t, x_1, y_1, on a de même, pour l'équation du plan tangent au point O'_1 de (S'),

$$z = p'_1 x + q'_1 y - \frac{1}{2}(r'_0 x'^2_1 + 2 s'_0 x'_1 y'_1 + t_0 y'^2_1).$$

On déduit de là, pour les équations de l'intersection des deux plans tangents en projection sur les plans xOy, yOz,

$$\begin{aligned}(q_1 - q'_1)y + (p_1 - p'_1)x \\ = \frac{1}{2}[r_0 x_1^2 + 2 s_0 x_1 y_1 + t_0 y_1^2 - (r'_0 x'^2_1 + 2 s'_0 x'_1 y'_1 + t_0 y'^2_1)],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z(p_1 - p'_1) = (p_1 q'_1 - q_1 p'_1)y \\ + \frac{1}{2}[(r_0 x_1^2 + 2 s_0 x_1 y_1 + t_0 y_1^2)p'_1 - (r'_0 x'_1 + 2 s'_0 x'_1 y'_1 + t_0 y'_2)p_1].\end{aligned}$$

Cette intersection est l'axe de la rotation ε, et nous supposerons que la direction de sa projection sur xOy est donnée. Nous dirigerons, en conséquence, Oy parallèlement à cette projection et, en désignant par χ sa distance à l'origine, nous aurons

$$(d) \quad \left\{ \begin{aligned} & q'_1 = q_1. \\ & (p_1 - p'_1)\chi = \frac{1}{2}\left[\begin{matrix} r_0 x_1^2 + 2 s_0 x_1 y_1 + t_0 y_1^2 \\ -(r'_0 x'^2_1 + 2 s'_0 x'_1 y'_1 + t'_0 y'^2_1) \end{matrix}\right], \\ & z = q_1 y + \frac{1}{2(p_1 - p'_1)}\left[\begin{matrix} (r_0 x_1^2 + 2 s_0 x_1 y_1 + t_0 y_1^2)p'_1 \\ -(r'_0 x'^2_1 + 2 s'_0 x'^2_1 y'_1 + t'_0 y'^2)p_1 \end{matrix}\right]. \end{aligned} \right.$$

Soit

$$(e)\quad \zeta = \frac{1}{2(p_1 - p'_1)}\left[(r_0 x_1^2 + 2 s_0 x_1 y_1 + t_0 y_1^2) p'_1 - (r'_0 x'^2_1 + 2 s_0 x'_1 y'_1 + t_0 y'^2) p_1\right]$$

la distance au plan xOy de l'intersection de la rotation ε avec le plan xOz.

Si p'_1 est différent de p_1, ζ sera du second ordre, et l'on pourra prendre $x'_1 = x_1$, $y'_1 = y_1$; mais il est facile de voir que ces deux dernières égalités donnent dans tous les cas pour ζ une valeur du second ordre. En effet, ζ peut se mettre sous la forme

$$\zeta = \frac{1}{2(p_1 - p'_1)}\left[\begin{array}{l} p'_1(r_0 x_1 + s_0 y_1) x_1 - p_1(r'_0 x_1 + s'_0 y_1) x_1 \\ + p'_1(t_0 y_1 + s_0 x_1) y_1 - p_1(t'_0 y_1 + s'_0 x_1) y^1 \end{array}\right].$$

Mais les équations (b) donnent

$$(f)\qquad \left\{\begin{array}{ll} r_0 x_1 + s_0 y_1 = p_1, & r'_0 x_1 + s'_0 y_1 = p'_1, \\ t_0 y_1 + s_0 y_1 = t'_0 y_1 + s'_0 x_1 = q_1\,; & \end{array}\right.$$

donc

$$\zeta = -\frac{q_1 y_1}{2},$$

longueur qui est bien du second ordre. Il suit de là que la rotation ε rencontre l'axe Ox.

La seconde des équations (d) prend la forme

$$(p_1 - p'_1)\chi = \frac{1}{2}\left[(r_0 - r'_0) x_1^2 + 2(s - s_0) x_1 y_1 + (t_0 - t'_0) y_1^2\right];$$

mais les équations (f) donnent

$$(1)\qquad \begin{array}{c} p_1 - p'_1 = (r_0 - r'_0) x_1 + (s_0 - s'_0) y_1, \\ (t_0 - t'_0) y_1 = -(s_0 - s'_0) x_1; \end{array}$$

on a donc, par suite,

$$(2)\qquad \chi = \frac{x_1}{2}.$$

Soient ε_y, ε_z les composantes de ε parallèles à Oy, Oz. On voit, à l'inspection de la troisième des équations (d), que

$$\varepsilon_z = q_1 \varepsilon_y;$$

d'où, en négligeant q_1^2,

$$\varepsilon_z = \varepsilon q_1,$$
$$\varepsilon_y = \varepsilon.$$

La rotation ε_z, qui est du premier ordre, peut être négligée, puisqu'elle ne donne dans le temps dt qu'un déplacement du troisième ordre de O_1. Il suit de là que la rotation ε, parallèle à Oy, est comprise dans le plan xOy.

Soient

m la projection commune de O_1, O'_1 sur le plan xOy;
$Om = d\sigma$ le roulement élémentaire;
λ l'angle qu'il forme avec Ox;
ν, ν' les angles formés avec Oz par les normales en O_1, O'_1 à (S), (S').

L'équation (1) donne

$$\tang\lambda = -\frac{s_0 - s'_0}{t_0 - t'_0}, \tag{3}$$

et l'on a

$$x_1 = \cos\lambda\, d\sigma, \qquad y_1 = \sin\lambda\, ds;$$

puis, en se reportant aux formules (b),

$$p_1 = (r_0 \cos\lambda + s_0 \sin\lambda)\, d\sigma,$$
$$q_1 = (t_0 \sin\lambda + s_0 \cos\lambda)\, d\sigma$$

et enfin

$$\cos\nu = \frac{1}{\sqrt{1 + p_1^2 + q_1^2}} = 1 - \frac{p_1^2 + q_1^2}{2},$$

d'où

$$\nu^2 = p_1^2 + q_1^2 = [r_0^2 \cos^2\lambda + s_0(r_0 + t_0)\sin 2\lambda + t_0^2 \sin^2\lambda + s_0^2]\, d\sigma^2.$$

On a aussi

$$2z_1 = (r_0^2 \cos^2\lambda + s_0 \sin 2\lambda + t_0^2 \sin^2\lambda)\, d\sigma^2$$

et des relations semblables aux précédentes relativement à (S').

On choisira le sens des z positifs, de manière que z_1 soit positif. Le plan tangent en O_1, pour venir coïncider avec le plan tangent en O'_1, devra décrire, autour de l'intersection des deux plans, l'angle $\nu + \nu'$ ou $\nu - \nu'$, selon que z'_1 sera négatif ou positif, ou encore que les sections faites par le plan zOx

opposeront ou non leurs convexités en O. On a donc, en comprenant les deux cas dans une même formule,

$$\varepsilon\, dt = \nu \pm \nu'$$

ou

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \varepsilon\, dt = \Big[&\sqrt{r_0^2 \cos^2\lambda + s_0(r_0 + t_0)\sin 2\lambda + t_0^2 \sin^2\lambda + s_0^2} \\ &\pm \sqrt{r_0'^2 \cos^2\lambda + s_0'(r_0' + t_0')\sin 2\lambda + t_0'^2 \sin^2\lambda + s_0'^2}\Big]\, d\sigma. \end{aligned}\right.$$

Nous nous bornerons à appliquer les formules (3) et (4) aux cas particuliers suivants :

1° $s = 0$, $s_0' = 0$. Les plans zOx, zOy sont principaux pour les deux surfaces et l'on a $\lambda = 0$, et les sections faites par le premier de ces plans rouleront l'une sur l'autre. L'équation (4) devient

$$\varepsilon\, dt = (r_0 \pm r_0')\, d\sigma$$

ou

$$(5)\qquad \varepsilon\, dt = \left(\frac{1}{R} \pm \frac{1}{R'}\right) d\sigma,$$

en désignant par R, R′ les rayons de courbure des sections de (S), (S′). Cette relation est évidente quand on considère deux cylindres tangents suivant une génératrice commune.

2° $t_0 = 0$, $t_0' = 0$. Les deux indicatrices dont les équations se réduisent à

$$2z = r_0 x^2 + 2 s_0 xy,$$
$$2z = r_0' x^2 + 2 s_0' xy$$

sont des hyperboles qui ont Oy pour asymptote commune; comme on a $\lambda = 90°$, le point m se trouve sur Oy et O_1, O_1' sur les lignes asymptotiques de (S), (S′), qui sont tangentes à Oy, et dont xOy est le plan osculateur. Il n'y a donc pas de roulement de surfaces proprement dit; mais la rotation γ fera rouler la ligne asymptotique de (S) sur celle de (S′).

Considérons les deux troncs de cône primitifs d'un engrenage conique; par le point de contact des petites bases, traçons sur les troncs deux lignes géodésiques tangentes entre elles et limitées aux grandes bases. Si l'un des cônes roule sur l'autre, la ligne géodésique du premier roulera sur celle du second, et, en chaque point de contact, les plans osculateurs coïncideront. Prenons maintenant chaque ligne asymptotique

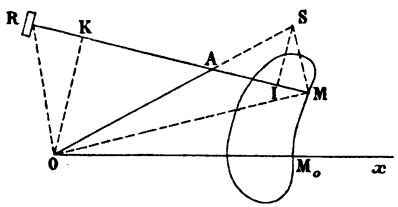
pour directrice d'un conoïde dont les génératrices soient normales à l'axe du cône correspondant. La directrice de chaque conoïde sera pour lui une ligne asymptotique. Les deux conoïdes resteront constamment en contact sans qu'il y ait ni roulement ni glissement. On a ainsi le principe d'un engrenage conique sans frottement. Si les deux cônes deviennent des cylindres, on retombe sur l'engrenage de Whyte.

3° $t_0 = 0$, $t'_0 = 0$, $s_0 = 0$, $s'_0 = 0$. — L'indicatrice de chaque surface se réduisant à deux parallèles à Oy, les deux surfaces sont développables et tangentes suivant Oy, L'angle λ est indéterminé et le roulement peut avoir lieu dans toutes les directions, ce que l'on savait.

6. *Sur le planimètre d'Amsler.* — Nous renverrons pour la description de cet instrument au Tome III de notre Traité de cet Ouvrage; mais nous proposerons de substituer aux deux théories que nous avons données de son fonctionnement la suivante, qui nous paraît plus simple et plus claire.

Soient (*fig.* 22)

Fig. 22.



O la pointe fixe;

A l'articulation des deux tiges;

M la pointe qui doit décrire le périmètre comprenant l'aire que l'on veut évaluer;

Ox la direction du rayon vecteur mené au point de départ M_0;

R la roulette dont l'axe est RM;

$\overline{OA} = a$, $\overline{AM} = b$, $\overline{AR} = c$;

u le rayon vecteur OM et θ l'angle polaire $\widehat{MOx}$.

Le déplacement de M a pour composantes du suivant OM et $u\,d\theta$ perpendiculaire à cette droite, et il suffit de considérer séparément ces deux composantes.

1° *Déplacement du.* — Comme OM n'est pas censé se déplacer autour de O, le centre instantané S de AM est l'intersection du prolongement de OA avec la perpendiculaire en M à OM.

Soient I, K les projections de S et de O sur MR.

Le déplacement de R autour de S est $\overline{SR}\frac{du}{\overline{SM}}$ et a pour composantes

$\frac{du}{\overline{SM}}\overline{SI}$ suivant RM, qui ne produit qu'un glissement de la roulette, dont on n'a pas à tenir compte;

(*a*) $\frac{du}{\overline{SM}}\overline{RI}$ perpendiculaire à RM, qui produira un roulement de R.

2° *Déplacement u dθ.* — Le déplacement de R est $\overline{OR}\,d\theta$, et se décompose en

$-\overline{OK}\,d\theta$ suivant RM, ce qui ne produira qu'un glissement;

(*b*) $\overline{KR}\,d\theta$ perpendiculaire à RM, qui donnera lieu à un roulement.

L'élément de roulement ou la somme des expressions (*a*) et (*b*) sera donc

$$(c)\qquad d\sigma = \overline{KR}\,d\theta + \frac{du}{\overline{SM}}\,\overline{RI}.$$

Le triangle AOM donnant

$$\overline{AK} = \frac{u^2 - a^2 - b^2}{2b},$$

on a

$$\overline{KR} = \overline{AR} - \overline{AK} = \frac{2bc + a^2 + b^2 - u^2}{2b},$$

et l'expression (*c*) devient

$$d\sigma = \frac{2bc + a^2 + b^2}{2b}\,d\theta - \frac{u^2}{2b}\,d\theta + \frac{\overline{RI}}{\overline{MS}}\,du;$$

d'où, en intégrant pour le périmètre entier en revenant au point de départ M_0,

$$(d)\qquad \sigma = -\frac{1}{b}\int\frac{u^2\,d\theta}{2} + \frac{a^2 + b^2 + 2bc}{2b}\int d\theta + \int\frac{\overline{RI}}{\overline{SM}}\,du.$$

Pour chaque valeur de u, le triangle AOM est complètement déterminé et, par suite, $\frac{\overline{RI}}{\overline{SM}}$ est une certaine fonction $f(u)$.

Mais la courbe étant fermée, la circonférence de rayon u la coupe en un certain nombre pair de points. Soient M_1, M_2 deux successifs de ces points situés sur la circonférence de rayon u; M'_1, M'_2 les points correspondants situés sur la circonférence de rayon $u + du$. De M_1 à M'_1, on a l'élément

$$f(u)\,du;$$

de M'_2 à M_2,

$$-f(u+du)\,du = -f(u)\,du.$$

Ces deux éléments se détruisant, on voit que $\int f(u)\,du = 0$, et l'on a simplement, en désignant par A l'aire qu'il s'agit d'évaluer,

$$(1) \qquad \sigma = \frac{A}{b} + \frac{a^2+b^2+2bc}{2b}\int d\theta.$$

Trois cas sont à distinguer :

1° *Le point* O *est extérieur au périmètre.* — C'est le cas usuel : un rayon vecteur coupera la courbe en un nombre pair de points. Soient M_1, M_2 deux points successifs situés sur un même rayon; M'_1, M'_2 les points correspondants situés sur un rayon infiniment voisin du précédent. De M_2 à M'_2 l'angle θ augmentera de $d\theta$, mais diminuera de $d\theta$ de M'_1 à M_1. L'intégrale de l'équation (1) est donc nulle, et l'on a, par suite,

$$(2) \qquad A = b\sigma.$$

Si ρ est le rayon de la roulette, on déterminera b de manière qu'à un tour de la roulette correspondent m unités de surface; d'où

$$m = 2\pi\rho b,$$

Pour $m = 1$, on a

$$1 = 2\pi\rho b_1;$$

par suite,

$$b = mb_1.$$

On déterminera b_1 par le calcul ou par tâtonnements en

prenant pour aire un carré égal à l'unité de surface. On aura ensuite

$$\frac{A}{m} = \frac{\sigma}{2\pi\rho} = \frac{N}{100},$$

N étant le nombre des 100 divisions de la jante qui ont passé devant un doigt fixé à RM.

2° *Le point* O *est intérieur au périmètre.* — On a

$$\int d\theta = 2\pi$$

et

$$A = b\sigma + \frac{a^2 + b^2 + 2bc}{b}\pi.$$

Le réglage de l'instrument s'effectuera comme ci-dessus; mais il convient, autant que possible, de ne pas se placer dans le cas, à cause du calcul que nécessite l'évaluation de A.

3° *Le point* O *se trouve sur le périmètre.* — Il faut ici que $a = b$. Si le périmètre est un polygone rectiligne, mixtiligne ou curviligne, on a, en plaçant O ou M_0 à un sommet dont l'angle est α,

$$A = b\sigma + b(b + c)\alpha.$$

Mais, le calcul de α en nombres présentant quelques longueurs, il convient de se placer en dehors d'un point anguleux, et alors on a

$$A = b\sigma + b(b + c)\pi.$$

Dans le cas actuel, la construction de l'instrument présente quelques difficultés; car : 1° pour que $a = b$, il faut que OA soit à coulisse; 2° pour que la pointe M vienne au-dessous de O, il faut que OA soit au-dessus du plan du périmètre et que l'articulation A traverse ce plan.

7. *Sur les systèmes articulés ayant pour objet le tracé d'une droite et d'un arc de cercle.*

(*a*) Lemme : *Rappel des deux propriétés de deux courbes planes dont les rayons vecteurs sont réciproques.* — Soient OB $= r'$ le rayon vecteur d'une courbe donnée (S'), faisant l'angle θ avec l'axe fixe Ox;

$Om = r$ le rayon vecteur, suivant la même droite, d'une autre courbe (S) définie par la relation

$$rr' = \text{const.}k; \tag{1}$$

ds', ds les arcs élémentaires de (S'), (S) correspondant à l'accroissement angulaire $d\theta$.

φ', φ les angles formés par les normales en B, m avec OBm.

La constante k peut être négative, en convenant alors de mesurer r à partir de O sur le prolongement de BO.

On a

$$dr = -\frac{k\,dr'}{r'^2} = -\frac{r}{r'}dr',$$

$$ds = \sqrt{r^2 d\theta^2 + dr^2} = \frac{r}{r'}\sqrt{r'^2 d\theta^2 + dr'^2};$$

d'où

$$\frac{ds}{ds'} = \frac{r}{r'}. \tag{2}$$

Soient V et u les vitesses de m et B : on a

$$\frac{V}{u} = \frac{r}{r'}. \tag{3}$$

Si l'on remarque

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{r'}\frac{dr'}{d\theta} = -\operatorname{tang}\varphi',$$

on voit que

$$\varphi = 180^\circ - \varphi'; \tag{4}$$

d'où il suit que le rayon vecteur coupe les deux courbes sous des angles supplémentaires.

On remarquera que si N est l'intersection des deux normales, le triangle mNB est isoscèle.

Soient P l'intersection de la normale en B à (S') avec Ox; OP $= \mu$, mP $=$ R'; on a

$$R'^2 = \mu^2 + r'^2 - 2\mu r' \cos\theta$$

ou, en éliminant r' au moyen de l'équation (1),

$$(R'^2 - \mu^2)r^2 + 2\mu kr\cos\theta = k^2$$

ou encore, en coordonnées rectangulaires,

$$(R'^2 - \mu^2)(x^2 + y^2) + 2\mu kx = k^2. \tag{5}$$

Supposons maintenant que P soit un point fixe, centre d'un cercle dont le rayon est R'. D'après l'équation (5), le lieu décrit par le point m est un autre cercle dont le centre O_1, situé sur Ox, est défini par

$$(6) \qquad OO_1 = -\frac{\mu k}{R'^2 - \mu^2}.$$

Le rayon du second cercle a pour valeur

$$(7) \qquad R_1 = \pm \frac{kR'}{R'^2 - \mu^2},$$

en prenant le signe + ou le signe —, selon que k et $(R' - \mu)$ seront de même signe ou de signes contraires.

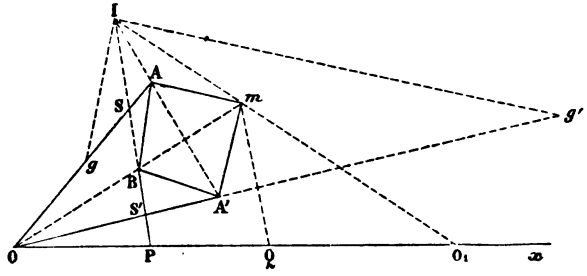
La trajectoire de m se réduit à une droite perpendiculaire à Ox, si $R' = \mu$, et cette droite, d'après l'équation (5), est définie par

$$x = \frac{k}{2\mu}.$$

(*b*) *Systèmes composés de sept tiges articulées.*

1° *De Peaucellier.* — Soient (*fig.* 23)

Fig. 23.



OA = OA' = R deux tiges mobiles, dont l'une est fixée à l'arbre O et dont l'autre est folle sur cet arbre;

ABA'm un losange articulé en A, A' à OA, OA'; en B, à la tige BP = R', mobile autour du point P; il y a également une articulation en m;

a le côté du losange;

OP = u.

Il s'agit de déterminer la nature du lieu du point m lorsque l'on fait varier la position de OA ou OA'.

Le carré de la tangente, menée du point O à la circonférence ayant A pour centre et passant par B et m, est $R^2 - a^2$ et l'on a, par suite,

$$OB \times Om = R^2 - a^2.$$

On rentre dans le cas du lemme précédent en supposant $k = R^2 - a^2$; le lieu de m sera donc une circonférence, ayant son centre en O_1, qui se réduira à une droite perpendiculaire à Ox lorsque l'on prendra OP = PB.

On pourra donc décrire, au moyen de cet instrument, des arcs de cercle d'un rayon aussi grand qu'on voudra, en donnant à $\mu - R'$ une valeur convenable.

On obtiendra un compas général en plaçant l'axe P sur un coulisseau pouvant être fixé, au moyen d'une vis de pression, sur la pièce dans laquelle est ménagée la coulisse. On pourra même graduer la coulisse de manière à pouvoir fixer immédiatement le coulisseau pour obtenir une circonférence d'un rayon donné.

Soient

v, v', u, V les vitesses respectives des sommets A, A', B, m;
S, S' les centres instantanés de rotation de BA, BA';
I l'intersection des directions de PB et de la diagonale AA', point par lequel passe également la direction de O_1m, puisque, d'après le lemme, les normales BP, mO_1 font des angles supplémentaires avec OBm.
g, g' les intersections respectives de OA avec la parallèle en I à AB, et de OA' avec la parallèle au même point à Am.

On a

$$v \times \frac{SB}{AS} = u, \qquad v' \times \frac{S'B}{A'S'} = u.$$

Les deux triangles semblables ASB, ISg donnant

$$\frac{SB}{AS} = \frac{IB}{Ag},$$

il vient

$$v = u\,\frac{Ag}{IB}$$

et, de même,

$$v' = u\frac{A'g'}{IB};$$

d'où

$$\frac{v}{v'} = \frac{Ag}{A'g'}.$$

Si l'on remarque que $\widehat{AgI} = \widehat{A'g'I}$, $\widehat{IAg} = \widehat{IA'g'}$, les triangles gIA, $g'IA'$ sont semblables, et l'on a enfin

$$\frac{v}{v'} = \frac{AI}{A'I} \quad (^1).$$

D'après le lemme énoncé ci-dessus, on a

$$V = u\frac{Om}{OB}$$

ou, en menant la parallèle en m à BP, limitée en Q à Ox,

$$V = \frac{u}{BP}\,\overline{mQ} \quad (^2).$$

Il résulte de ce qui précède que les vitesses de trois sommets du losange pourront se déterminer en fonction de la vitesse du quatrième sommet censée donnée.

2° *Système de Kempe* (*fig.* 24). — Soient $ABA'B'$ un quadrilatère dont les diagonales se coupent à angle droit en g (3). Construisons un quadrilatère $BB'mI$ ayant l'angle B

---

(1) L'élégant théorème qui résulte de cette relation est dû à M. Mannheim.

(2) En remarquant que $\frac{u}{BP}$ est la vitesse angulaire de la tige PB, on retombe sur un théorème démontré, pour la première fois, d'une autre manière, par M. d'Ocagne, mais seulement dans le cas où le point m décrit une droite.

(3) Plus généralement, soit $\widehat{AgB} = \theta$. Posons $AB = a$, $A'B' = a'$, $BB' = b$, $A'A = b'$, $Ag = x$, $Bg = y$, $B'g = x'$, $A'g = y'$. On a

$$a^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\theta, \qquad b^2 = y^2 + x'^2 + 2yx'\cos\theta,$$
$$a'^2 = x'^2 + y'^2 - 2x'y'\cos\theta, \qquad b'^2 = y'^2 + x^2 + 2y'x\cos\theta,$$

d'où

$$(a^2 + a'^2) - (b^2 + b'^2) = -2(xy + yx' + x'y' + y'x)\cos\theta = -2\overline{AB'}.\overline{BA'}\cos\theta.$$

Si, pour une forme particulière du quadrilatère censé déformable on a $\theta = 90°$, on aura constamment $\theta = 90°$. Les diagonales resteront donc à angle droit, quelle que soit la déformation.

et le côté BB′ communs avec le précédent, de manière que les deux quadrilatères soient semblables; pour obtenir les côtés homologues, on devra partir du point B dans le sens BB′ pour le premier et dans le sens BA pour le second.

On à

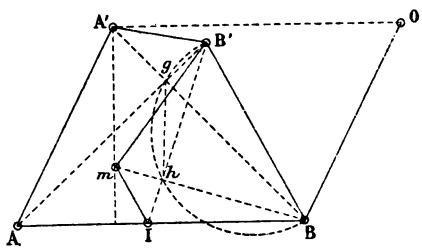
$$\frac{BB'}{BA} = \frac{B'm}{AA'} = \frac{mI}{A'B'} = \frac{IB}{B'B},$$

d'où

$$BI = \frac{BB'^2}{AB}, \qquad Im = \frac{A'B'.BB'}{AB}, \qquad mB' = \frac{AA'.BB'}{AB}.$$

Soit h l'intersection orthogonale des diagonales du quadri-

Fig. 24.



latère BB′mI. Les points g et h se trouvant sur la circonférence décrite sur le diamètre BB′, on a

$$\widehat{hgB} = \widehat{hB'B};$$

par suite, en raison de la similitude,

$$\widehat{hgB} = \widehat{BAB'}.$$

Il suit de là que, en considérant le triangle AgB, la droite gh est perpendiculaire à AB.

Mais, comme, dans les deux quadrilatères, les sommets A′, m sont homologues et qu'il en est de même des points g et h, on voit que

$$\frac{Bg}{BA'} = \frac{Bh}{Bm},$$

et que, par suite, la droite A′m est parallèle à gh, et enfin perpendiculaire à AB.

Cela posé, rendons fixe le point A′, en introduisant des articulations en B, I, A, B′.*m*.

Portons à partir de A une longueur A′O égale et parallèle à AB; fixons le point O que nous relierons par une tige OB à l'articulation B.

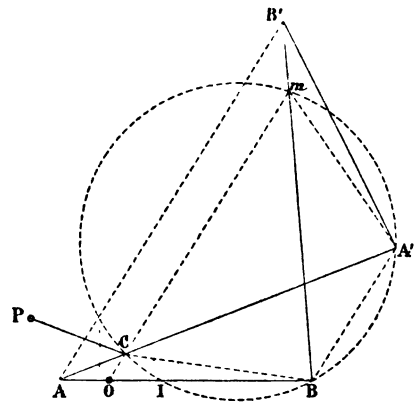
Si l'on déplace OB autour de O, la figure se déformera; mais AB restera parallèle à A′O. Le point *m* décrira donc la perpendiculaire en A′ à A′O.

Le système de Kempe doit être placé après celui de Peaucellier, puisque, avec le même nombre de tiges et une articulation de plus, il ne conduit qu'au tracé mécanique de la ligne droite.

(*c*) *Systèmes à cinq tiges de Hart.* — Dans les deux systèmes que nous allons étudier, M. Hart a réduit de deux le nombre de tiges employées par M. Peaucellier, tout en conservant les propriétés de l'appareil de ce dernier.

1° Soient AB = A′B′ (*fig.* 25) deux tiges articulées à leurs

Fig. 25.



extrémités et en diagonale à deux tiges AA′, BB′ de même longueur que les précédentes; O un point fixe autour duquel la tige AB peut se déplacer. Le système ne sera à liaisons complètes qu'en l'assujettissant à une dernière condition que nous établirons ultérieurement.

Les triangles ABA′, B′A′B étant égaux, il en est de même de leurs angles en B, A′, et les droites BA′ et AB′ sont parallèles.

Portons, à partir du point A sur AA′, la longueur

$$AC = \frac{AA'.AO}{AB},$$

et soit m l'intersection de la direction de OC avec BB′; si l'on fait éprouver une déformation au système, les droites OCm, BA′, AB′ ne cessent pas d'être parallèles, et le trapèze CBA′m, qui est isoscèle, est inscriptible. De ce que B′m = AC, la longueur Bm reste invariable.

En désignant par I la seconde intersection de AB avec la circonférence circonscrite au trapèze ci-dessus, on a

$$AI.AB = AC.AA';$$

par suite, I est un point déterminé de AB.

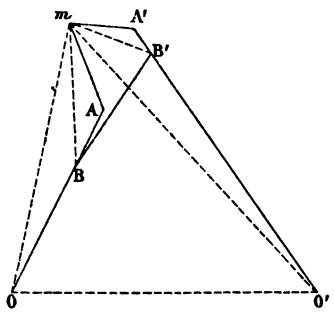
D'autre part,

$$OC.Om = OI.OB = \text{const.}$$

Si donc PC est une tige articulée en C et mobile autour d'un point fixe P, le lieu du point m sera une circonférence ou une droite.

2° Soient [*fig.* 26 (¹)]

Fig. 26.



OA = a, O′A′ = a' deux tiges mobiles autour des points fixes O, O′;

(¹) L'analyse suivante est empruntée à M. Darboux, à quelques différences près.

$Am = b$, $A'm = b'$ deux autres tiges articulées en A, A' aux précédentes et réunies en m par une articulation;
l la distance donnée OO'.

On rendra le système à liaisons complètes en s'imposant la condition que les angles OAm, $O'A'm$ restent constamment égaux, sauf à voir plus loin comment il sera possible de réaliser cette conception. Si nous portons sur AO, A'O' les longueurs respectives

$$(1) \qquad AB = \frac{Am.A'm}{A'O'}, \qquad A'B' = \frac{A'm.Am}{AO},$$

les triangles mAB, $mA'O'$ resteront semblables, de même que les triangles $mA'B'$, mAO.

On déduit de là

$$\frac{Am}{A'O'} = \frac{AB}{A'm}, \qquad \frac{A'm}{AO} = \frac{A'B'}{Am};$$

d'où

$$(2) \qquad \frac{AB}{AO} = \frac{A'B'}{A'O'}.$$

Si nous représentons par k ce rapport, nous aurons

$$(2') \qquad AB = ka, \qquad A'B' = ka'.$$

Les mêmes couples de triangles semblables donnent aussi

$$(3) \qquad mB = mO'\frac{ka}{b'}, \qquad mB' = mO\frac{ka'}{b}.$$

On a, en raison de la similitude des triangles,

$$\widehat{BmA} = \widehat{mO'A'},$$
$$\widehat{OmA} = \widehat{mB'A'},$$

et, en remarquant que

$$\widehat{mB'A'} = \widehat{mO'A'} + \widehat{O'mB'},$$

il vient, en retranchant la seconde de la première des inégalités ci-dessus,

$$\widehat{OmB} = \widehat{O'mB'}.$$

Mais on a aussi

$$\widehat{BmB'} = \widehat{OmB'} - \widehat{OmB},$$

$$\widehat{OmO'} = \widehat{OmB'} - \widehat{O'mB'};$$

d'où, en raison de la relation précédente,

$$\widehat{BmB'} = \widehat{OmO'},$$

angle que nous désignerons par φ.

Si d est la distance BB′, on a, en ayant égard aux valeurs (3),

$$d^2 = \overline{mB}^2 + \overline{mB'}^2 - 2\overline{mB}.\overline{mB'}\cos\varphi$$

$$= k^2\left(\frac{a^2}{b'^2}\overline{mO'}^2 + \frac{a'^2}{b^2}\overline{mO}^2 - \frac{2aa'}{bb'}\overline{mO}.\overline{mO'}\cos\varphi\right),$$

$$l^2 = \overline{mO}^2 + \overline{mO'}^2 - 2\overline{mO}.\overline{mO'}\cos\varphi,$$

d'où, par l'élimination de $\cos\varphi$,

$$(4) \qquad \frac{d^2}{k^2} - \frac{aa'}{bb'}l^2 = \left(\frac{a}{b'} - \frac{a'}{b}\right)\left(\frac{a}{b'}\overline{mO'}^2 - \frac{a'}{b}\overline{mO}^2\right).$$

En posant

$$\psi = \widehat{OAm} = \widehat{O'A'm},$$

on a

$$\overline{mO'}^2 = a'^2 + b'^2 - 2a'b'\cos\psi,$$

$$\overline{mO}^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\psi,$$

et, par l'élimination de $\cos\psi$,

$$(5) \qquad \frac{a}{b'}\overline{mO'}^2 - \frac{a'}{b}\overline{mO}^2 = \frac{(a'^2 + b'^2)ab - (a^2 + b^2)a'b'}{bb'}.$$

Il résulte des équations (4) et (5) que la distance d est constante et s'obtiendra, soit par le calcul, soit par une épure lorsqu'on se donnera la valeur de k. Le système théorique proposé sera donc réalisé en joignant, au moyen d'articulations, les points B, B′ par une tige.

Prenons le point O pour origine des coordonnées rectangu-

laires, OO′ pour la direction de l'axe des x; nous avons

$$\overline{mO'}^2 = (l - x)^2 + y^2,$$
$$\overline{mO}^2 = x^2 + y^2,$$

et, en ayant égard à ces valeurs, l'équation (5) devient

$$(6)\quad \left(\frac{a}{b'} - \frac{a'}{b}\right)(x^2 + y^2) - \frac{2alx}{b'} = \frac{(a'^2 + b'^2)ab - (a^2 + b^2)a'b'}{bb'} - \frac{al^2}{b'}.$$

La ligne décrite par le point m sera donc généralement une circonférence, et se réduira à une droite perpendiculaire à OO′ si $ab = a'b'$.

Considérons spécialement ce cas particulier : soient

S l'intersection de la parallèle à Ox, menée par le point m, avec la direction de OA;
T l'intersection de la direction de mA avec Ox;
ω la vitesse angulaire de OA autour de O;
V la vitesse du point m.

On a, par la similitude des triangles mAS, OAT,

$$V = \frac{\omega . OA}{AS} Sm = \omega . OT.$$

8. *Engrenage elliptique.* — Cet engrenage a pour objet de transformer une rotation autour d'un axe en une autre autour d'un axe parallèle au premier, de manière que le rapport des rotations suive une certaine loi qu'il s'agit d'établir.

Soient (*fig.* 27)

(S) et (S′) deux ellipses égales, en contact sur la direction commune de leurs grands axes;
O, O′ les foyers des deux courbes qui sont respectivement le plus et le moins éloignés du contact;
F, F′ les deux autres foyers.

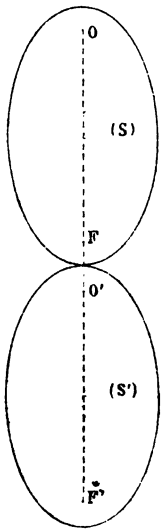
Si l'on fait tourner (S′) comme roue menante de la gauche vers la droite autour du point O′ rendu fixe, on déterminera une rotation de (S) autour du point fixe O, et le contact en m

(*fig.* 28) aura lieu constamment sur OO'. Le mouvement (S) sera interrompu à partir de l'instant où F' viendra, après une demi-révolution de (S'), se placer sur OO'.

Soient

$2a$ le grand axe et e l'excentricité des ellipses;
θ' l'angle dont (S') a tourné, c'est-à-dire l'angle formé par O'F avec le prolongement de OO';
$O'm = r'$, $Om = 2a - r'$ les rayons vecteurs de (S'), (S);
ω, ω' les rotations autour de O, O'.

Fig. 27.



Comme (S) roule sur (S') censé fixe, on a

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{r'}{2a - r'},$$

et comme

$$r' = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos\theta'},$$

il vient

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{1 - e^2}{1 + e^2 + 2e\cos\theta'}.$$

En désignant par θ l'angle $\widehat{mOF}$ dont (S) a tourné, on a

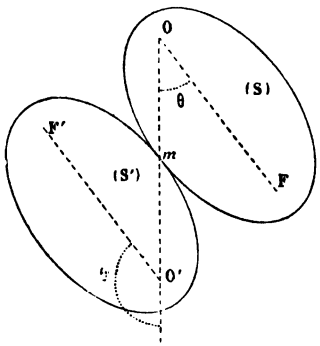
$$Om = \frac{a(1-e^2)}{1-e\cos\theta}, \qquad Om = 2a - \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta'},$$

d'où, en identifiant,

$$\cos\theta = \frac{2e+(1+e^2)\cos\theta'}{1+e^2+2e\cos\theta'}.$$

En se donnant le profil des dents d'une roue, on obtiendra celui des dents de l'autre roue, en appliquant la méthode

Fig. 28.



donnée pour les engrenages cylindriques, les ellipses se trouvant substituées aux circonférences primitives.

Si un flanc est rectiligne, il doit être normal à l'ellipse. Comme les dents font une faible saillie sur les ellipses, on pourra, sur une certaine étendue, remplacer les deux courbes par leurs cercles osculateurs. On substituera ainsi aux profils réels des têtes de petits arcs d'épicycloïdes. Il est facile de reconnaître que la courbure des têtes va en diminuant à mesure que l'on s'approche d'un sommet du petit axe. Il est évident qu'il suffit d'exécuter le panneau d'un quart d'ellipse pour faire le tracé des dents des deux roues.

La continuité du mouvement peut d'ailleurs s'assurer géométriquement en montant sur chacun des axes O, O' une autre roue elliptique identique à la première, mais inversement disposée.

9. *Engrenage logarithmique.* — Soient (*fig.* 29)

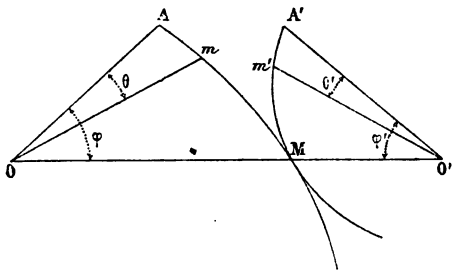
O, O′ les centres de deux rotations de sens contraires et qui sont les pôles de deux spirales logarithmiques représentées par

$$r = r_0 e^{\alpha\theta}, \qquad r' = r'_0 e^{-\alpha\theta'};$$

OA, OA′ les droites à partir desquelles on mesure les angles θ et θ';

m, m' deux points correspondants des deux courbes qui viennent coïncider sur OO′.

Fig. 29.



Les angles θ, θ' définissant m, m' auront entre eux la relation

$$r_0 e^{\alpha\theta} + r'_0 e^{-\alpha\theta'} = \overline{OO'},$$

et il y aura contact en M sur OO′, puisque les tangentes des angles formés par les tangentes en m avec les rayons vecteurs Om, O′m' sont respectivement $\frac{1}{\alpha}$, $-\frac{1}{\alpha}$.

En désignant par φ, φ' les angles MOA, M′OA′, on a

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{d\varphi}{d\varphi'};$$

mais de la relation

$$r_0 e^{\alpha\varphi} + r'_0 e^{-\alpha\varphi'} = OO',$$

on déduit facilement

$$\frac{d\varphi}{d\varphi'} = \frac{r'}{r}.$$

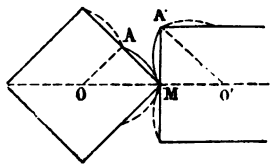
Il vient donc

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{r'}{r}.$$

Il suit de là que AM roule sur A′M considéré comme fixe.

Exemple (machine à imprimer de Bacon et Donkin). — Soient (*fig.* 30) deux carrés dont la longueur du côté est $2a$,

Fig. 30.



disposés de manière que, lorsque l'une des diagonales de l'un se trouve suivant OO′, deux côtés parallèles de l'autre soien perpendiculaires à cette direction. On prendra

$$r_0 = OA = a, \qquad r'_0 = O'A' = a\sqrt{2};$$

d'où

$$a\sqrt{2} = ae^{\frac{\alpha\pi}{4}}, \qquad a = a\sqrt{2}e^{-\frac{\alpha\pi}{4}},$$

conditions compatibles dont l'une permettra de déterminer α. On remarquera que les arcs AM, MA′ des spirales sont identiques.

On a

$$\text{max.}\ \frac{\omega}{\omega'} = \sqrt{2}, \qquad \text{min.}\ \frac{\omega}{\omega'} = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Le rapport d'un maximum à un minimum est égal à 2.

Les arcs se reproduisant deux fois sur un côté des carrés, il y aura dans une révolution autour de O et O′ quatre maxima et quatre minima de $\frac{\omega}{\omega'}$.

10. *Joint Clémens.* — Ce mécanisme a pour objet de transformer l'une dans l'autre deux rotations égales autour d'axes concourants.

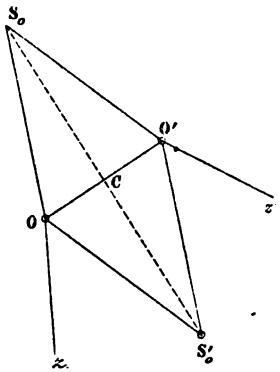
Soient (*fig.* 31)

Oz, $O'z'$ les deux axes de rotation;

OO' une perpendiculaire à la bissectrice de leur angle, qui les rencontre respectivement en O et O′ et dont le milieu est C;

S_0, S'_0 deux points de la bissectrice symétriques par rapport à OO'.

Fig. 31.



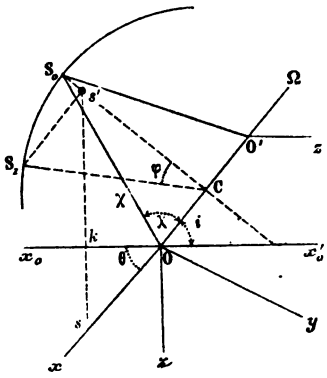
Concevons que l'on relie S_0 aux extrémités O et O′ des arbres par des tiges ou manivelles OS_0, $O'S_0$, munies chacune d'un tourillon perpendiculaire au plan de la figure et s'engageant dans des coussinets qui terminent les arbres. En S_0 se trouve un genou, formé, comme on le sait, d'une sphère pleine, qui termine une des manivelles, venant se loger dans une sphère partielle creuse de même rayon et qui termine l'autre manivelle. La même disposition est adoptée pour le sommet S'_0; mais, comme elle n'a pour objet que de renforcer la première ou de donner au mécanisme un aspect particulier, qu'elle n'est pas utile au point de vue géométrique, nous en ferons abstraction.

En admettant que le système soit possible, sauf vérification ultérieure, la rotation ω' autour de $O'z'$ déterminera une rotation Ω du triangle isoscèle OS_0O' autour de OO', d'où résultera une rotation ω autour de Oz. Il est évident que, en raison de la symétrie, les deux rotations ω, ω' sont égales et, de plus, de sens contraire. Nous désignerons par S une position quelconque du sommet du triangle.

Pour fixer les idées, nous supposerons que Oz est vertical et nous prendrons $zO'z$ pour plan vertical de projection.

Soient (*fig.* 32)

Fig. 32.



$x_0Ox'_0$ la ligne de terre perpendiculaire à Oz;

λ l'angle donné S_0OO';

i l'angle $\widehat{COx'_0}$ également donné;

$R = CS_0$ le rayon du cercle décrit par S;

s, s' les projections horizontale et verticale de S, Osx étant la projection horizontale du côté OS du triangle mobile;

Oy la perpendiculaire à Ox dans le plan horizontal ou la direction de l'axe de la charnière O;

S_1 la position que prend S quand on rabat le plan du cercle de rayon R sur le plan vertical en le faisant tourner autour de sa trace CS_0;

$\varphi = \widehat{S_1Cs'}$ l'angle dont le triangle a tourné à partir de la position OS_0O';

θ l'angle variable xOx_0.

La vitesse angulaire de l'arbre Oz est

$$\omega = \frac{d\theta}{dt};$$

elle a lieu de la droite vers la gauche en se plaçant suivant Oz, en ayant les pieds en O.

Si k est l'intersection de $s's$ avec Ox_0, on a

$$sk = Ok \tang\theta = S_1 s' = R \sin\varphi,$$

d'où

$$Ok = R \sin\varphi \cot\theta.$$

Comme Ok est la différence des projections sur $x_0x'_0$ de $Cs' = R\cos\varphi$ et de $OC = R\cot\lambda$, on a

$$Ok = R\cos\varphi \sin i - R\cot\lambda \cos i;$$

d'où, en égalant les valeurs de Ok,

$$(1) \qquad \tang\theta = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi \sin i - \cot\lambda \cos i}.$$

On déduira de là, en fonction de $\frac{d\theta}{dt} = \omega$, φ et θ, la rotation $\Omega = \frac{d\varphi}{dt}$ du triangle autour de OO'.

Soient χ la rotation de la manivelle OS autour de son axe de figure; χ_x sa projection sur Ox.

La rotation Ω donne les composantes

$$\begin{aligned} &-\Omega \sin i, \quad \text{suivant } Oz, \\ &-\Omega \cos i, \quad \text{»} \quad Ox_0; \end{aligned}$$

d'où, pour la composante suivant Ox,

$$(2) \qquad \zeta = -\Omega \cos i \cos\theta = -\frac{d\varphi}{dt} \cos i \cos\theta.$$

D'autre part, on a

$$\frac{\chi}{\chi_x} = \frac{OS}{Os} = \frac{OS_0}{Os} = \frac{R}{\sin\lambda} \times \frac{1}{\frac{Sk}{\sin\theta}}$$

$$= \frac{R\sin\theta}{\sin\lambda\, S_1 s'} = \frac{R\sin\theta}{\sin\lambda} \frac{1}{R\sin\varphi} = \frac{\sin\theta}{\sin\lambda \sin\varphi};$$

d'où

$$(3) \qquad \chi_x = \chi \frac{\sin\lambda \sin\varphi}{\sin\theta}.$$

La manivelle ne pouvant tourner autour de Ox, qui est

perpendiculaire à l'axe de la charnière, la somme des expressions (2) et (3) est nulle; par suite,

$$(4) \qquad \chi = \frac{\cos i}{\sin\lambda}\,\frac{\sin\theta\cos\theta}{\sin\varphi}\,\frac{d\varphi}{dt}.$$

Soit ψ l'angle dont a tourné la manivelle OS autour de son axe; on a $\chi = \frac{d\psi}{dt}$, et, en éliminant θ au moyen de l'équation (1), on trouve

$$(5) \quad d\psi = \frac{\cos i}{\sin\lambda}\,\frac{\sin\varphi(\cos\varphi\sin i - \cot\lambda\cos i)\,d\varphi}{\cos^2\varphi\sin^2 i - \sin^2 i\cot\lambda\cos\varphi + \cot^2\lambda\cos^2 i + \sin^2\varphi},$$

expression que l'on ne peut intégrer.

Comme, généralement, $\cot\lambda\cot i$ est plus grand que l'unité, $\frac{d\psi}{dt}$ ne peut s'annuler que pour $\varphi = 0$, $\varphi = 180°$. Pour $\varphi = 90°$, on a

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{\tang\lambda\cos i}{\cos^2 i + \tang^2\lambda}\,\frac{d\varphi}{dt}.$$

CHAPITRE III.

DE L'ACCÉLÉRATION D'UN POINT.

11. *L'accélération d'un point, lorsque sa direction est constante, est proportionnelle au rapport du cube de la vitesse au rayon de courbure de la trajectoire.* — Soient, à l'instant t, v et φ la vitesse et l'accélération du point et β l'angle qu'elles forment entre elles; $2c$ la corde interceptée dans le cercle osculateur par la direction de φ.

Au bout du temps dt, la vitesse sera comprise dans le plan de v et φ, et ainsi de suite; d'où il suit que la trajectoire est plane.

La composante $v \sin\beta$ de v normale à φ étant constante, on a, en désignant par a sa valeur,

$$v \sin\beta = a.$$

Mais on a (t. I, p. 42)

$$\varphi = \frac{v^2}{\rho \sin\beta} = \frac{v^2}{c};$$

d'où

$$\varphi = \frac{v^3}{\rho a},$$

ce qu'il fallait établir.

On a aussi la relation

$$\frac{\rho}{c} = \frac{v}{a};$$

d'où un autre théorème qu'il est facile d'énoncer.

12. *L'accélération d'un point dirigé vers un centre fixe est proportionnelle au cube de la vitesse, au rayon vecteur et à la courbure de la trajectoire.* — On démontrerait, comme ci-dessus, que la trajectoire est plane.

Soient

O le centre fixe;
r le rayon vecteur;
α l'angle qu'il forme avec la normale.

L'indice o caractérisera les valeurs de v, r, α, qui se rapportent à un instant déterminé t_0. On a, d'après le théorème des aires (t. I, p. 45),

$$vr\cos\alpha = v_0 r_0 \cos\alpha_0,$$

et, en remarquant que $\varphi\cos\alpha = \frac{v^2}{\rho}$, il vient

$$\varphi = \frac{rv^3}{\rho r_0 v_0 \cos\alpha_0},$$

ce qu'il s'agissait de démontrer.

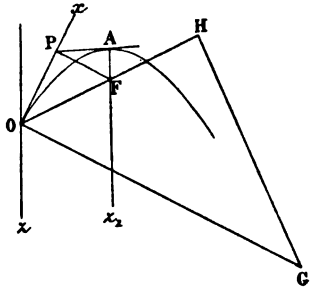
On remarquera que

$$\frac{\rho}{c} = \frac{rv}{r_0 v_0 \cos\alpha_0};$$

d'où un nouveau théorème que nous nous dispenserons d'énoncer.

13. *Rayon de courbure de la parabole.* — Soient (*fig.* 33)

Fig. 33.



O un point déterminé de la trajectoire d'un point pesant, où Ox est la direction de la vitesse v_0; Oz la verticale du point O.

On a

$$x = v_0 t, \qquad z = \frac{gt^2}{2};$$

d'où, par l'élimination de t, pour l'équation de la trajectoire parabolique,

$$x^2 = \frac{2v_0^2}{g} z.$$

Le foyer F de la parabole se trouve sur la droite partant de O symétrique, par rapport à Ox, du prolongement de Oz, et à la distance $OF = \frac{v_0^2}{2g}$ du point O.

Soient

A, AFz_1 le sommet et l'axe de la courbe;
P la projection de F sur l'axe Ox, ou l'intersection de la tangente en A avec cet axe;
$2c$ la corde interceptée par Oz dans le plan osculateur en O.

On a

$$g = \frac{v_0^2}{c};$$

par suite,

$$\frac{2v_0^2}{g} = 2c,$$

d'où ce théorème de Maclaurin :

La corde du cercle osculateur, déterminée par le diamètre correspondant, est égale au paramètre relatif à ce diamètre.

Soit $\rho = OG$ le rayon de courbure de la parabole en O; on a

$$c = \rho \cos\widehat{GOz} = \rho \cos\widehat{GOF} = \frac{v_0^2}{g} = 2\overline{OF};$$

d'où

$$\widehat{OG} \cos\widehat{GOF} = 2\overline{OF}.$$

Donc : *le centre de courbure se projette sur la direction du rayon vecteur focal en un point* H, *distant du foyer d'une longueur égale à ce rayon.*

14. *Rayon de courbure de l'ellipse.* — 1° Considérons d'abord l'ellipse comme étant décrite par un point m, partant de l'un des sommets du grand axe $2a$ avec une vitesse v_0, dont

l'accélération μr [1], dirigée vers le centre, est proportionnelle au rayon vecteur r, menée de ce centre au mobile m. Le second axe est donné par

$$2b = \frac{2v_0}{\sqrt{\mu}}.$$

Soient p la distance du centre à la tangente en m ou la projection de r sur la normale; v la vitesse et ρ le rayon de courbure en m.

L'accélération normale étant μp, on a

$$\frac{v^2}{\rho} = \mu p,$$

et, d'après le principe des aires,

$$vp = v_0 a.$$

En éliminant v et μ entre les équations ci-dessus, on trouve

$$\rho = \frac{a^2 b^2}{p^3}.$$

Soient (*fig.* 34) OC le demi-diamètre conjugué au rayon vecteur $Om = r$; $mD = p$ la distance de m à OC; on sait que

$$ab = \overline{OC} \times \overline{mD} = \overline{OC}\, p,$$

et l'on a, par suite,

$$\rho = \frac{\overline{OC}^2}{\overline{mD}}.$$

Portons sur le prolongement de OC, à partir du point C, la longueur $\overline{CE} = \overline{OD}$, et déterminons l'intersection T de la direction de mD avec la perpendiculaire en E à mE; nous avons

$$DT = \frac{\overline{DE}^2}{\overline{mD}} = \frac{\overline{OC}^2}{\overline{mD}} = \rho,$$

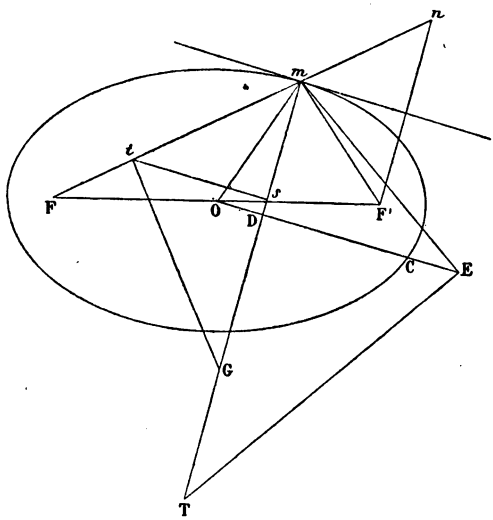
et, en portant sur mD, à partir de m, la longueur $mG = DT$, on déterminera le centre de courbure G de l'ellipse.

---

[1] T. I, p. 64.

On déterminerait de la même manière le centre de courbure de l'hyperbole censée décrite par le point m, en vertu d'une vitesse initiale v_0 à l'un des sommets et de l'accélération $\mu.\widehat{Om}$ dirigée dans le sens de Om.

Fig. 34.



2° Considérons maintenant l'ellipse comme étant directe par un point m dont l'accélération, dirigée vers un foyer F, varierait en raison inverse du carré du rayon vecteur $r = \mathrm{F}m$; dans ce qui suit, p représentera la distance de F à la tangente en m, α l'angle formé par r avec la normale.

Nous avons

$$p = r\cos\alpha,$$

et, en nous reportant à la page 66 du Tome I,

$$v = \frac{k}{p}, \qquad \varphi = \frac{k^2}{a(1-e^2)r^2} = \frac{k^2 a}{b^2 r^2}.$$

L'accélération normale a pour expression

$$\frac{v^2}{\rho} = \frac{k^2}{p^2}\frac{1}{\rho} = \frac{k^2}{r^2\cos^2\alpha}\frac{1}{\rho},$$

et, en l'identifiant à $\varphi \cos\alpha$, on trouve

$$\rho = \frac{b^2}{a \cos^3 \alpha}.$$

En désignant par r' le rayon vecteur $F'm$ partant de l'autre foyer F', on a, d'après une propriété connue,

$$b^2 = r \cos\alpha . r' \cos\alpha,$$

d'où

$$\rho = \frac{rr'}{a \cos\alpha}.$$

Soient s l'intersection de la normale avec FF'; n le point symétrique de F' par rapport à la tangente; les triangles semblables mFs, nFF' donnent

$$\overline{ms} = \frac{\overline{Fm}.\overline{F'n}}{\overline{Fn}} = \frac{rr' \cos\alpha}{a},$$

et l'on a, par suite,

$$\rho = \frac{\overline{ms}}{\cos^2 \alpha}.$$

Il suit de là que le centre de courbure G s'obtiendra en menant en s une parallèle à la tangente, rencontrant en t le rayon vecteur Fm, puis déterminant l'intersection de la normale avec la perpendiculaire en t à ce rayon.

Cette construction s'applique évidemment à l'hyperbole et à la parabole.

15. *Propriétés géométriques de la cycloïde.* — Nous désignerons par R le rayon de la circonférence génératrice.

Soient à l'instant t (*fig.* 35)

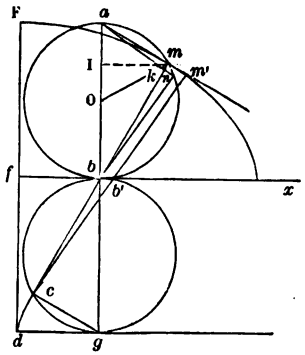
O, a, b les positions du centre, du sommet, du point de contact avec la droite directrice bx de la circonférence;
m celle du point décrivant;
ρ le rayon de courbure en m.

Soient de plus F le sommet de la cycloïde et f sa projection sur bx.

Nous pouvons supposer constante la rotation instantanée ω autour de b; en la transportant en O, nous obtiendrons la

translation ωR parallèle à bx et la rotation ω autour de O, qui seule déterminera pour le point m une accélération, soit

Fig. 35.



$\omega^2 R$, dirigée de m vers O. La composante normale de cette accélération étant $\omega^2 \frac{mb}{2}$, nous aurons

$$\omega^2 \frac{\overline{mb}}{2} = \omega^2 \frac{\overline{mb}^2}{\rho},$$

d'où

$$\rho = 2\,\overline{mb}.$$

Donc : *le rayon de courbure de la cycloïde est le double de la normale.*

Soit g l'intersection de la direction de ab avec la perpendiculaire au centre de courbure c à cbm. On a évidemment

$$bg = ab = 2R,$$

et la circonférence décrite sur bg comme diamètre passe par le point c. Si d est l'intersection de Ff avec la parallèle en g à bx, on a

$$\text{arc}\,cg = \text{arc}\,am = \text{arc}\,amb - \text{arc}\,mb = bf = gd.$$

Il suit de là que *la développée de la cycloïde est une courbe qui lui est identique, mais dont les sommets et les points de rebroussement correspondent respectivement aux sommets et aux points de rebroussement de l'enveloppe.*

Soient m' un point de la cycloïde infiniment voisin de m; b' le point d'intersection de la normale $m'c$ avec fx. L'aire du triangle mcm' est quadruple de celle du triangle bcb'; par suite, l'aire du quadrilatère $mbb'm'$ est triple de celle du triangle bcb' ou du triangle mbn déterminé par la corde de la circonférence parallèle à cm'. Il suit de là que :

1° *Une portion de l'aire de la cycloïde, comprise entre deux normales quelconques, est le triple de la portion de l'aire du cercle générateur, limitée par les parallèles à ces normales menées par le point de contact de ce cercle avec la droite directrice;* 2° *l'aire de la cycloïde est triple de celle du cercle générateur.*

Si k est l'intersection de an avec bn, on a évidemment $\overline{mm'} = 2\overline{kn}$, c'est-à-dire que l'accroissement infiniment petit de l'arc Fm mesuré à partir du sommet est le double de l'accroissement infiniment petit de la corde am. Donc :

1° *L'arc de la cycloïde, mesuré à partir du sommet, est égal au double de la corde correspondante du cercle générateur, partant de son sommet;* 2° *la longueur totale de la cycloïde est égale à quatre fois le diamètre du cercle générateur.*

Soient

I la projection de m sur ba;
α l'angle mba formé par la normale avec la direction de ba;
z la distance aI;
y la distance mI;
s l'arc Fm.

On a

$$\overline{am} = \frac{s}{2} = \sqrt{2R.\overline{aI}},$$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{bm}}{\overline{ab}} = \frac{\sqrt{ab.bI}}{ab},$$

d'où

$$s = 2\sqrt{2Rz},$$

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{2R}},$$

Nous voyons ainsi qu'en désignant par A, B deux constantes, l'une ou l'autre des équations

$$s = A\sqrt{z},$$

$$\cos\alpha = B\sqrt{y}$$

représentera une cycloïde dont il sera facile de déterminer le rayon de la circonférence génératrice.

16. *Rayon de courbure de l'hélice.* — Soient β l'angle constant sous lequel l'hélice coupe les génératrices du cylindre; R le rayon de courbure de la section droite du cylindre.

La courbe peut être considérée comme étant décrite par un mobile qui se meut sur la section droite avec la vitesse constante v, tandis que cette section se transporte parallèlement à elle-même avec la vitesse $v\cot\beta$.

Or la seule accélération qui résulte de ce double mouvement est l'accélération $\frac{v^2}{R}$ normale à la section droite, nécessairement dirigée suivant le rayon de courbure de l'hélice, puisque la vitesse résultante $v\sqrt{1+\cot^2\beta}$ est constante. Ainsi la direction du rayon de courbure ρ de l'hélice se confond avec celle du rayon de courbure de la section droite. Enfin on a

$$\frac{v^2}{R} = \frac{v^2(1+\cot^2\beta)}{\rho},$$

d'où

$$\rho = R(1+\cot^2\beta) = \frac{R}{\sin^2\beta},$$

et une construction simple fera connaître la position du centre de courbure de l'hélice.

CHAPITRE IV.

DE L'ACCÉLÉRATION D'UN POINT D'UN SYSTÈME INVARIABLE.

§ I. — *Mouvement d'une figure plane dans son plan* (1).

17. On peut supposer que la rotation instantanée ω est constante. Le centre des accélérations, dit alors *géométrique*, se trouve sur la perpendiculaire à la vitesse U du centre instantanée de rotation O, menée en ce centre, en sens inverse de la rotation de ω, et à une distance du même centre égale à $\frac{U}{\omega}$.

Supposons que l'on puisse déterminer le centre géométrique A des accélérations de la figure et proposons-nous de trouver le rayon de courbure de la trajectoire d'un point m de cette figure. Soit I la projection de A sur Om. La composante normale $\frac{\omega^2.\overline{Om}^2}{\rho}$ de l'accélération de m n'étant autre chose que la projection $\omega^2.\overline{mI}$ de l'accélération totale $\omega^2.Am$ de ce point sur mO, on a

$$\rho.\overline{mI} = \overline{Om}^2.$$

d'où ρ.

Si à l'inverse ρ est donné, la position du point I sera déterminée, et alors on saura que A se trouve sur la perpendiculaire en I à Om.

18. *Détermination du centre géométrique des accélérations dans quelques cas spéciaux :*

1° *Le mouvement de la figure* (S) *est défini par le rou-*

(1) T. I, p. 92.

lement d'une courbe (σ) *tracée dans son plan sur une courbe fixe* (σ'). — Soient

O le point de contact de (σ), (σ') ou le centre instantané de rotation de (S);
R, R′ les rayons de courbure de ces courbes en O;
ds l'élément commun aux deux courbes.

On a (n° 5)

$$\omega\, dt = \left(\frac{1}{R} \pm \frac{1}{R'}\right) ds;$$

or $ds = U\,dt$, par suite,

$$\frac{U}{\omega} = \frac{1}{\frac{1}{R} \pm \frac{1}{R'}} = \frac{RR'}{R' \pm R},$$

ce qui définit la position du centre géométrique A. Cette formule est notamment applicable à la détermination du rayon de courbure de la classe des épicycloïdes.

Si la courbe fixe se réduit à une droite ou si $R' = \infty$, le centre coïncide avec le centre de courbure de la courbe mobile (σ).

Supposons, par exemple, que (σ) soit une parabole : soient

F le foyer qui décrit une courbe dont on veut déterminer le rayon de courbure ρ;
C le centre de courbure en O;
I sa projection sur la normale OF.

On a

$$FI = \frac{\overline{OF}^2}{\rho};$$

mais, dans la parabole (n° 13), IF = FO; donc

$$\rho = FO,$$

où le rayon de courbure est égal à la normale, ce qui caractérise la chaînette.

2° *Une des conditions du déplacement de* (S) *est que l'un n de ses points soit assujetti à rester sur une courbe donnée.* — Soient C le centre de courbure de la courbe; I la projection du centre A sur Cn.

On a, d'après ce qui précède,

$$nI = \frac{\overline{On}^2}{\overline{nC}},$$

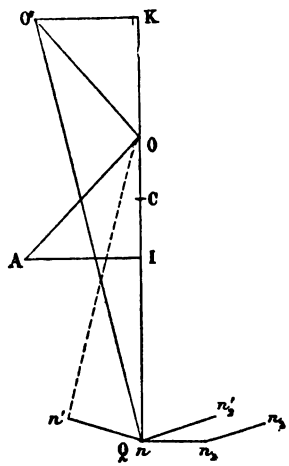
ce qui détermine une perpendiculaire à Cn sur laquelle se trouvera A.

On remarquera que, si la courbe se réduit à une droite, le point A se trouve sur cette droite.

Le centre A se trouvera déterminé dans le cas où deux points n, n' de (S) seraient respectivement assujettis à rester sur deux courbes données.

3° *Une des conditions du déplacement de* (S) *est qu'une courbe tracée dans son plan passe constamment par un point fixe* Q. — Soient (*fig.* 36)

Fig. 36.



nn_1, $n_1 n_2$ deux éléments consécutifs de la courbe, le point n se trouvant en Q à l'instant t;

O le centre instantané de rotation, situé sur la normale au point n;

C le centre de courbure et $d\varepsilon$ l'angle de contingence au même point.

Au bout du temps dt, $nn_1 n_2$ sera venu en $n'Qn'_2$, le point n_1 venant coïncider avec Q, et le centre instantané venant se placer en O′ sur la normale à Qn'_2.

On a

$$\widehat{n'Qn'_2} = 180^\circ - \varepsilon, \qquad \widehat{n'QO} = 90^\circ - \omega\, dt,$$

$$\widehat{OQn'_2} = \widehat{n'Qn'_2} - \widehat{n'QO} = 90^\circ - d\varepsilon + \omega\, dt,$$

$$\widehat{O'QO} = 90^\circ - \widehat{OQn'_2} = d\varepsilon - \omega\, dt.$$

Soient A le centre géométrique des accélérations, situé sur la perpendiculaire en O à OO′; K, I les projections sur OQ de O′ et A.

Nous savons que

$$\overline{OA} = \frac{1}{\omega}\,\frac{\overline{OO'}}{dt}.$$

Les triangles semblables OAI, O O′K donnent

$$\overline{OI} = \overline{O'K}\,\frac{\overline{OA}}{\overline{OO'}} = \frac{\overline{O'K}}{\omega\, dt};$$

mais

$$\overline{O'K} = \overline{O'Q}\sin\widehat{O'QO} = \overline{OQ}(d\varepsilon - \omega\, dt),$$

d'où

$$\overline{OI} = \overline{OQ}\,\frac{d\varepsilon}{\omega\, dt} - \overline{OQ};$$

on a aussi

$$\overline{Qn'} = nn_1 = \omega.\overline{OQ}\, dt,$$

$$\frac{d\varepsilon}{nn_1} = \frac{1}{\overline{CQ}},$$

par suite,

$$(a) \qquad OI = \frac{\overline{OQ}^2}{CQ} - \overline{OQ}.$$

On remarquera que

$$\overline{IC} = \overline{OI} - \overline{OC} = \frac{\overline{OQ}^2}{\overline{CQ}} - \overline{OQ} - (OQ - CQ) = \frac{(\overline{OQ} - \overline{OC})^2}{\overline{CQ}}$$

ou

$$(b) \qquad IC = \frac{\overline{OC}^2}{\overline{CQ}}.$$

L'une ou l'autre des formules (a) et (b) déterminera le point I, par suite, une perpendiculaire à la normale OQ sur laquelle se trouvera le centre A.

Si la ligne donnée se réduit à une droite, ou si $\overline{CQ} = \infty$, on a simplement

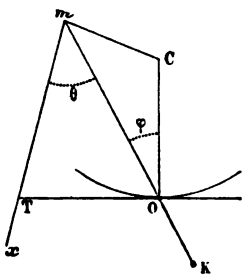
$$OI = -OQ.$$

Les rayons de courbure de la conchoïde et de la cissoïde [1] se construiront facilement en faisant l'application de la seconde et de la troisième des règles ci-dessus.

19. *Sur les propriétés d'une courbe qui roule sur une droite.* — Déterminer la forme que doit avoir une courbe pour qu'en roulant sur une droite un point m de son plan décrive une courbe donnée, tel est le problème que nous nous proposons de résoudre.

Soient (*fig.* 37)

Fig. 37.



O le point du contact de la courbe cherchée avec la droite directrice;

$\rho = OC$ le rayon de courbure de cette courbe, C étant aussi le centre géométrique des accélérations;

$R = \overline{mK}$ le rayon de courbure de la courbe décrite par m;

$r = mO$ sa normale;

φ l'angle que cette normale forme avec OC;

---

[1] Considérée comme le lieu du milieu du côté d'un angle droit, dont l'extrémité décrit une droite, la direction de l'autre côté étant assujettie à passer par un point fixe.

mx une droite fixe dans le plan de la courbe mobile, menée par m;
T son intersection avec la droite directrice du roulement;
θ l'angle formé par mO avec mx.

La courbe cherchée sera définie par une relation entre les coordonnées polaires r et θ.

L'accélération normale $\frac{\omega^2 r^2}{R}$ du point m, dirigée de m vers K, étant égale à sa composante de ω^2. Cm suivant sa direction, ou à $\omega^2(r - \rho\cos\varphi)$, on a

$$(1) \qquad \frac{1}{R} = \frac{1}{r} - \frac{\rho\cos\varphi}{r^2}.$$

Or

$$\widehat{OT.x} = \theta + 90^\circ - \varphi;$$

d'où, pour l'angle de contingence de la courbe roulante,

$$d(\theta - \varphi)$$

et, en désignant par $ds = \frac{r\,d\theta}{\cos\varphi}$ l'élément d'arc de cette courbe,

$$\rho = \frac{ds}{d(\theta - \varphi)} = \frac{r\,d\theta}{\cos\varphi\,d(\theta - \varphi)}.$$

L'équation (1) devient

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} - \frac{d\theta}{r\,d(\theta - \varphi)},$$

d'où

$$(2) \qquad \frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{r}{r - R}.$$

Avant d'aller plus loin, nous ferons remarquer que l'équation (2) permet de résoudre immédiatement le problème proposé dans le cas où $R = mr$, m étant un nombre quelconque positif ou négatif : on a, en effet,

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = -\frac{1}{m - 1};$$

d'où, en choisissant la direction de mx de manière que φ soit

nul avec θ,

$$(3) \qquad \varphi = -\frac{\theta}{m-1}.$$

On déduit de là

$$\frac{dr}{r\,d\theta} = \operatorname{tang}\varphi = -\operatorname{tang}\frac{\theta}{m-1};$$

puis, en désignant par r_0 la valeur de r correspondant à $\theta = 0$,

$$(4) \qquad r = r_0 \cos^{m-1}\frac{\theta}{m-1}.$$

L'hypothèse de $m = 1$ est inadmissible, ce qui est d'ailleurs évident *a priori*. Pour $m = 2$, la courbe roulante est une circonférence dont le diamètre est égal à r_0, ce qui devait être, puisque la relation $R = 2r$ caractérise la cycloïde. Pour $m = -1$, on obtient une parabole rapportée à son axe et à son foyer; la courbe caractérisée par $r = -R$ est la chaînette que nous avons déjà rencontrée au n° 18.

Proposons-nous maintenant d'intégrer l'équation (2) en supposant que R soit exprimé au moyen de la variable r. Nous avons

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = r\frac{d\varphi}{dr}\frac{dr}{r\,d\theta} = r\frac{d\varphi}{dr}\operatorname{tang}\varphi = -r\frac{d\log\cos\varphi}{dr},$$

et l'équation précitée devient

$$\frac{d\log\cos\varphi}{dr} = -\frac{1}{r-R};$$

d'où, en désignant par C une constante positive,

$$(5) \qquad \cos\varphi = \sqrt{C}\,e^{-\int\frac{dr}{r-R}}.$$

On déduit de là

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta} = \sqrt{\frac{e^{2\int\frac{dr}{r-R}}}{C} - 1},$$

d'où, en désignant par ε une seconde constante,

$$(6) \qquad \theta + \varepsilon = \int\frac{dr}{r\sqrt{\frac{e^{2\int\frac{dr}{r-R}}}{C} - 1}}.$$

Si le lieu de m est un cercle ou si R est constant, l'intégration peut s'effectuer, mais le résultat obtenu est trop compliqué pour qu'il y ait lieu de s'y arrêter.

Supposons que l'on veuille tracer la courbe méridienne de la surface de révolution dont la moyenne courbure est constante et égale à $\frac{1}{K}$. Nous aurons, en prenant pour droite directrice l'axe de la surface,

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{r} = \frac{1}{K},$$

et l'équation (6) donne, par l'élimination de R,

$$\theta + \varepsilon = \sqrt{C} \int \frac{dr}{r\sqrt{r(r - 2K) - C}}.$$

Cette intégrale s'obtient facilement en posant $r = \frac{1}{z}$ et l'on obtient finalement

$$r = \frac{-\frac{C}{K}}{1 - \sqrt{1 + \frac{C}{K^2}} \cos(\theta + \varepsilon)}.$$

En choisissant convenablement la direction de mx, on peut faire en sorte que $\varepsilon = 180°$, et alors il vient

$$(7) \qquad r = \frac{-\frac{C}{K}}{1 - \sqrt{1 - \frac{C}{K^2}} \cos\theta}.$$

On voit ainsi que la courbe donnée est décrite par le foyer d'une conique roulant sur une droite.

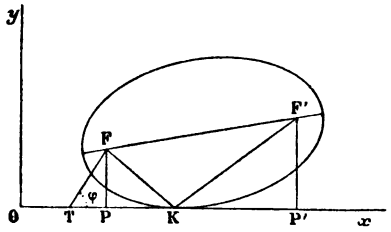
Pour que r soit positif, ce qu'exige la nature de la question, il faut que C et K soient de signes contraires. Si K est positif et C négatif, la courbe roulante est une hyperbole. Si K est négatif et C positif, la courbe est une ellipse. Enfin, si, $\frac{C}{K}$ restant fini, K est infini, on obtient une parabole.

Mais ce mode de génération de la courbe ne permet pas de voir nettement les différentes formes qu'elle peut affecter; il

convient à ce point de vue de compléter la solution ainsi qu'il suit.

1° *La courbe roulante est une ellipse.* — Soient (*fig.* 38)

Fig. 38.



Ox la droite directrice prise pour l'un des axes coordonnés ;
$2a$, $2b$ le grand et le petit axe de l'ellipse qui touche Ox en K ;
F le foyer décrivant, F' l'autre foyer ;
$OP = x$, $FP = y$ les coordonnées de F ;
$y' = F'P'$ l'ordonnée de F' ;
$\varphi = \widehat{FTx}$ l'angle formé avec Ox par la tangente en F au lieu décrit.

On a

$$\widehat{FKP} = \widehat{F'KP'} = 90^\circ - \varphi,$$

$$y = FK\cos\varphi, \qquad y' = F'K\cos\varphi,$$

d'où

$$y + y' = 2a\cos\varphi;$$

d'ailleurs,

$$yy' = b^2,$$

et, en éliminant y' entre les deux dernières équations,

$$(8) \qquad y^2 - 2ay\cos\varphi + b^2 = 0.$$

Si φ est obtus, il faudra changer le signe du second terme de l'équation (8).

La courbe est ondulée et ses points minima et maxima correspondent à $\varphi = 0$ et respectivement à

$$(9) \qquad y_1 = a - \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad y_2 = a + \sqrt{a^2 - b^2}.$$

On déduit de l'équation (8)

$$\cos\varphi = \frac{y^2 + b^2}{2ay}. \tag{10}$$

Il y a nécessairement un point d'inflexion entre un minimum et un maximum consécutifs, qui est donné par $\frac{d\varphi}{dy} = 0$, qui correspond à $y = b$ et à

$$\cos\varphi = \frac{b}{a}.$$

2° *La courbe roulante est une hyperbole.* — Il suffit, dans ce cas, de changer le signe de b^2 dans les équations (8) et (10), qui deviennent

$$y^2 \mp 2ay\cos\varphi - b^2 = 0, \tag{8'}$$

$$\cos\varphi = \pm\frac{y^2 - b^2}{2ay}. \tag{10'}$$

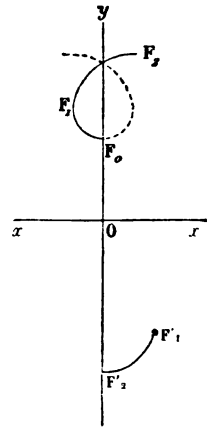
Soient (F), (F′) les courbes décrites par les foyers F, F′. En prenant y' en valeur absolue, on a

$$yy' = b^2.$$

Pour simplifier le langage, nous supposerons Ox horizontal, ce qui nous permettra de considérer l'hyperbole comme composée d'une branche supérieure (B) et d'une branche inférieure (B′). Soient (*fig.* 39) F_0, F'_2 les points de (F), (F′) correspondant à la position de (B) pour laquelle Ox est la tangente au sommet. Faisons passer Oy par F_0 et faisons rouler (B) sur Ox de la droite vers la gauche; φ diminuera à partir de 180° et le mouvement s'arrêtera pour $\varphi = 90°$ ou $y = y' = b$, puisque Ox deviendra une asymptote commune à (B) et (B′). Nous aurons ainsi obtenu les arcs F_0F_1 $F'_2F'_1$ de (F) et (F′), aux extrémités F_1, F'_1 desquels les tangentes seront verticales. Faisons maintenant rouler (B′) sur Ox de la gauche vers la droite jusqu'à sa position extrême; le point F décrira l'arc F_1F_2 identique à $F'_1F'_2$. On sera ainsi arrivé au tracé $F_0F_1F_2$ d'une demi-boule de (F), que l'on com-

plètera en faisant rouler sur Ox, dès l'origine, la branche (B) de la gauche vers la droite.

Fig. 39.



3° *La courbe roulante est une parabole.* — En posant $\frac{b^2}{a} = p$ et supposant $a = \infty$, l'équation (10) donne la suivante

$$\cos\varphi = \frac{p}{y},$$

qui est bien celle de la chaînette.

§ II. — *Accélération d'un point d'un système invariable dans le cas le plus général.*

20. *Expression de l'accélération.* — Pour simplifier, nous appellerons *axe des vitesses* l'axe instantané de rotation et de glissement du système (S). La *vitesse orthogonale* de cet axe sera le rapport à l'élément du temps de la plus courte distance de deux de ses positions consécutives. L'*accélération de glissement* sera l'accélération dans le mouvement de translation de (S), c'est-à-dire la dérivée géométrique de la vitesse de glissement.

Soient (*fig.* 40)

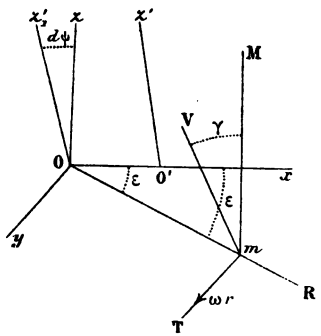
Oz, $O'z'$ deux axes des vitesses consécutifs du système invariable (S);

$U = \frac{OO'}{dt}$ la vitesse orthogonale dont la direction sera prise pour axe des x, en plaçant l'origine en O;

ω, $\omega + d\omega$ les vitesses angulaires instantanées autour de Oz, $O'z'$;

Q, Q' les vitesses de glissement suivant ces directions;

Fig. 40.



α, w les accélérations angulaires et de glissement;

Oz'_1 la parallèle en O à $O'z'$;

Oy la perpendiculaire en O menée au plan xOz dans le sens de ω.

La rotation $\omega + d\omega$ peut être considérée comme étant la résultante d'une rotation égale autour de Oz'_1 et d'une translation $(\omega + d\omega)OO' = U\omega\, dt$ dont la direction coïncide avec la partie négative de Oy. La rotation $\omega + d\omega$ autour de Oz'_1 se décompose en ω autour de Oz et en $\alpha\, dt$.

Enfin, on a

$$\overline{Q'} = \overline{Q} + \overline{w\, dt}.$$

Soient

M, M' les positions d'un point du système correspondant à celles Oz, $O'z'$ de l'axe des vitesses;

r leur distance à Oz;

p, $p+dp$ leurs distances respectives à l'axe de l'accélération angulaire.

La vitesse de M′ est la résultante de ωr, $\alpha(p+dp)\,dt=\alpha p\,dt$, $U\omega\,dt$, Q, $w\,dt$. Or, si l'on considère M, M′ en projection sur le plan xOy, on voit que la vitesse ωr de M′ est celle que prendrait au second instant le point M s'il tournait effectivement autour de Oz censé fixe avec la vitesse angulaire constante ω; il suit de là que la vitesse ωr de M′ se compose de celle ωr de M et de l'accélération élémentaire centripète $\omega^2 r\,dt$. L'accélération du point M a donc pour expression

$$\overline{\omega^2 r}+\overline{p\alpha}+\overline{w}+\overline{\omega U}$$

ou se compose : 1° *de l'accélération centripète due à la vitesse angulaire autour de l'axe des vitesses;* 2° *de l'accélération due à l'accélération angulaire;* 3° *de l'accélération de glissement;* 4° *d'une accélération égale au produit de la rotation instantanée par la vitesse orthogonale et dont la direction s'obtient en supposant que l'on fasse tourner autour de l'axe des vitesses la vitesse orthogonale de* 90° *en sens inverse de celui de la rotation instantanée.*

En supposant $\alpha=\frac{d\omega}{dt}$, $w=0$, on retombe sur l'énoncé qui se rapporte au mouvement d'une figure plane dans son plan.

Dans le cas où le système invariable est assujetti à tourner autour d'un point fixe O, on a $w=0$, $U=0$, et Ox est perpendiculaire au plan de deux axes des vitesses consécutifs.

Revenant aux généralités, soient

$d\psi$ l'angle zOz'_1;

$\alpha_z=\frac{d\omega}{dt}$, $\alpha_y=\omega\frac{d\psi}{dt}$ les composantes de l'accélération angulaire suivant Oz, Oy;

$w_z=\frac{dQ}{dt}$, $w_y=Q\frac{d\psi}{dt}$ les composantes semblables de l'accélération de glissement;

ε l'angle que forme r avec Ox;

$x=r\cos\varepsilon$, $y=r\sin\varepsilon$, z les coordonnées du point M;

φ_x, φ_y, φ_z les projections sur Ox, Oy, Oz de l'accélération φ de ce point.

On a

$$(1)\qquad \begin{cases} \varphi_x = -\omega^2 x - \alpha_z y + \alpha_y z \\ \varphi_y = -\omega^2 y + \alpha_z x - \omega U + w_y, \\ \varphi_z = -\alpha_y x + w_z. \end{cases}$$

Proposons-nous de voir si, à chaque instant, il n'existe pas un ou plusieurs points de (S) dont l'accélération est nulle, ce qui revient à exprimer que

$$(2)\qquad \begin{cases} -\omega^2 x - \alpha_z y + \alpha_y z = 0, \\ -\omega^2 y + \alpha_z x - \omega U + w_y = 0, \\ -\alpha_y x + w_z = 0. \end{cases}$$

Les trois plans représentés par ces équations ne se couperont généralement qu'en un point auquel nous donnerons le nom de *centre des accélérations;* mais il en est autrement si une de ces équations est identique ou si deux d'entre elles rentrent l'une dans l'autre. Nous avons à cet effet plusieurs cas à examiner.

1° $\alpha_y = 0$, $w_z = 0$. — La troisième des équations (2) est identique; mais le système (S) se meut parallèlement au plan xOy : il y a donc un axe des accélérations ou un centre si l'on considère le déplacement d'une figure plane dans son plan.

2° $\omega = 0$. — La première des équations (2) devient

$$\frac{y}{z} = \frac{\alpha_y}{\alpha_z},$$

et les deux autres donnent

$$\alpha_z w_z + \alpha_y w_y = 0,$$

ce qui exprime que les directions de α et w sont perpendiculaires entre elles : il y a donc un axe des accélérations. Cela devait être, puisque α et w, considérés respectivement comme une rotation et un glissement, se composent en une rotation parallèle à α.

3° $\alpha_y = 0$, $w_z \gtrless 0$. — On a $x = \infty$, et il n'y a aucun point de (S) dont l'accélération soit nulle, comme on devait le prévoir; car $\alpha_z = \alpha$ et $w_y - \omega U$ se composent en une rotation α

parallèle à Oz, et tous les points de (S) possèdent l'accélération w_z.

Nous ne nous occuperons dorénavant que du cas général où il y a un centre des accélérations. En désignant par x_1, y_1, z_1 les coordonnées de ce centre, les formules (1) deviennent, en ayant égard aux équations (2),

$$(3)\qquad \begin{cases} \varphi_x = -\omega^2(x-x_1) - \alpha_y(y-y_1) + \alpha_z(z-z_1), \\ \varphi_y = -\omega^2(y-y_1) - \alpha_z(x-x_1), \\ \varphi_z = -\alpha_y(x-x_1), \end{cases}$$

et expriment que : *L'accélération en chaque point du système* (S) *est la même que si la rotation instantanée et l'accélération angulaire avaient lieu autour du centre des accélérations considéré comme fixe.*

21. *Composantes normale et tangentielle à la trajectoire de l'accélération d'un point du système invariable.* — Soient (*fig.* 40)

m la projection du point M sur le plan xOy;

$V = \sqrt{\omega^2 r^2 + Q^2}$ la vitesse de ce point;

γ l'angle qu'elle forme avec Oz, défini par $\operatorname{tang}\gamma = \frac{\omega r}{Q}$;

R, T les composantes de l'accélération de M suivant Om et ωr;

φ_n, φ_t les composantes normale et tangentielle de φ.

Nous avons, en ayant égard aux formules (1),

$$(4)\qquad \begin{cases} R = \varphi_x \cos\varepsilon + \varphi_y \sin\varepsilon = -\omega^2 r + \alpha_y \frac{xz}{r} - (\omega U - w_y)\frac{y}{r}, \\ T = \varphi_y \cos\varepsilon - \varphi_x \sin\varepsilon = \quad \alpha_z r - \alpha_y \frac{yz}{r} - (\omega U - w_y)\frac{x}{r}. \end{cases}$$

En désignant par η la composante de $\overline{\varphi_z} + \overline{T}$, perpendiculaire à V, on a

$$(5)\qquad \eta = T\cos\gamma - \varphi_z \sin\gamma,$$

$$(6)\qquad \varphi_t = T\sin\gamma + \varphi_z \cos\gamma.$$

Enfin nous avons

$$(7)\qquad \varphi_n = \sqrt{R^2 + \eta^2}.$$

On devra remplacer, dans les expressions (6) et (7), φ_z, T, R, η par leurs valeurs (3), (4) et (5); puis γ par sa valeur donnée plus haut.

Si ρ est le rayon de courbure de la trajectoire de M, il sera déterminé par

$$\rho = \frac{V^2}{\varphi_n}. \tag{8}$$

22. *Direction de la normale principale de la trajectoire.* — La composante η de φ_n donne les suivantes

$$\begin{array}{ll} \eta\cos\gamma \quad \text{suivant } \omega r & \left\{\begin{array}{ll} -\eta\cos\gamma\sin\varepsilon & \text{suivant } Ox, \\ \eta\cos\gamma\cos\varepsilon & \quad\text{»} \quad Oy, \end{array}\right. \\ -\eta\sin\gamma \quad\quad \text{»} \quad Oz, & \end{array}$$

et, en tenant compte de l'autre composante R, nous avons

$$\left\{\begin{array}{l} \cos(\varphi_n, x) = \dfrac{R\cos\varepsilon - \eta\cos\gamma\sin\varepsilon}{\varphi_n}, \\ \cos(\varphi_n, y) = \dfrac{R\sin\varepsilon + \eta\cos\gamma\cos\varepsilon}{\varphi_n}, \\ \cos(\varphi_n, z) = -\dfrac{\eta\sin\gamma}{\varphi_n}. \end{array}\right. \tag{9}$$

23. *Plan osculateur.* — Le plan qui lui est mené parallèlement à l'origine est déterminé par les droites égales et parallèles à V et φ menées par cette origine. L'équation du second plan, en désignant par X, Y, Z ses coordonnées courantes, est ainsi

$$(Q\varphi_y - \varphi_z\omega x)X - (Q\varphi_x + \varphi_z\omega y)Y + \omega(x\varphi_x + y\varphi_y)Z = 0.$$

24. *Lieu géométrique des points du système dont l'accélération normale est nulle.* — D'après la formule (7), il faut que l'on ait simultanément

$$R = 0, \tag{a}$$

$$\eta = 0, \tag{b}$$

équations qui représentent deux surfaces dont l'intersection est le lieu cherché.

L'équation (*a*) revient à la suivante

$$\omega^2(x^2 + y^2) - \alpha_y xz + (\omega U - w_y)y = 0, \tag{10}$$

qui représente un hyperboloïde dont le centre est situé sur Oy. Si $\alpha_y = 0$, $w_y = 0$, ce qui est, notamment, le cas où le système se meut parallèlement au plan xOy, la surface se réduit à un cylindre droit.

L'équation (b), par des substitutions, prend la forme

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} &[\alpha_z(x^2+y^2) - \alpha_y yz + (w_y - \omega U)x]Q \\ &\qquad + (\alpha_y x - w_z)\omega(x^2+y^2) = 0, \end{aligned}\right.$$

et représente une surface du troisième degré. Si Q est nul, cette surface se réduit à un plan représenté par

$$\alpha_y x - w_z = 0,$$

coupant la surface (10) suivant une parabole qui est le lieu cherché.

Enfin l'équation (11) est satisfaite d'elle-même si le système se meut parallèlement au plan xOy, et le lieu est alors le cylindre ci-dessus.

25. *Lieu des points dont l'accélération tangentielle est nulle.* — En égalant à zéro le second membre de l'équation (6), on obtient

$$(12)\qquad [\alpha_z(x^2+y^2) - \alpha_y yz + (w_y - \omega U)x]\omega + Q(w_z - \alpha_y x) = 0,$$

équation d'un hyperboloïde qui se réduit à un cylindre droit si $a_y = 0$.

26. *Examen d'un cas spécial.* — Supposons que le système tourne autour du point fixe O avec une vitesse angulaire constante, nous avons $Q = 0$, $w = 0$, $U = 0$, $\alpha_z = 0$, $\alpha_y = \omega \dfrac{d\psi}{dt}$, $\gamma = 90^\circ$, puis

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} &R = -\omega^2 r + \alpha_y \frac{xz}{r}, \\ &T = -\alpha_y \frac{yz}{r}, \\ &\eta = \alpha_y x, \\ &\varphi_n = \sqrt{\omega^4 r^2 - 2\omega^2 \alpha_y xz + \frac{\alpha_y^2}{r^2}(x^2+y^2+z^2)x^2}; \end{aligned}\right.$$

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} \rho &= \frac{\omega^2 r^2}{\varphi_n}, \\ \cos(\varphi_n, x) &= -\frac{(\omega^2 r^2 - \alpha_y xz)x}{r^2 \varphi_n}, \\ \cos(\varphi_n, y) &= -\frac{(\omega^2 r^2 - \alpha_y xz)y}{r^2 \varphi_n}, \\ \cos(\varphi_n, z) &= -\frac{\alpha_y x}{\varphi_n}. \end{aligned}\right.$$

On sait que le mouvement de (S) résulte du roulement d'un cône sur un cône fixe. Nous supposerons que ces deux cônes sont de révolution, et nous désignerons respectivement par 2δ, $2\delta'$ les angles de leurs sections méridiennes. Les sections normales à Oz des cônes, distantes de l'origine de ζ, rouleront l'une sur l'autre, et, en appelant $d\chi$, $d\chi'$ leurs angles de contingence, on aura

$$\omega\, dt = d\chi \pm d\chi',$$

en prenant l'un ou l'autre signe, selon que le cône fixe sera extérieur ou intérieur au cône mobile. Comme la valeur de l'élément commun aux deux sections est $d\sigma = \zeta\, d\psi$, nous avons

$$\omega\, dt = \left(\frac{d\chi}{d\sigma} \pm \frac{d\chi'}{d\sigma}\right)\zeta\, d\psi.$$

Mais les rayons de courbure principaux des deux cônes sont respectivement $\zeta \tang\delta$, $\zeta \tang\delta'$; d'où il suit que l'on a

$$\alpha_y = \omega\frac{d\psi}{dt} = \frac{\omega^2}{\cot\delta \pm \cot\delta'}.$$

Les formules (14) seront ainsi rendues indépendantes de ω, et feront connaître, notamment, les éléments de la courbure d'une épicycloïde sphérique.

CHAPITRE V.

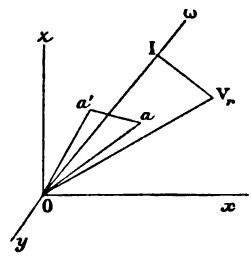
DU MOUVEMENT RELATIF D'UN POINT PAR RAPPORT A UN SYSTÈME INVARIABLE.

27. *Expression de l'accélération relative d'un point en fonction de l'accélération absolue et des accélérations apparentes.* — Nous sommes arrivés à l'expression dont il s'agit au Tome I (Ire Partie) par des considérations géométriques. Nous nous proposons ici de reproduire l'élégante méthode semi-géométrique, semi-analytique employée pour le même objet par M. Ph. Gilbert, et qui permet d'écrire immédiatement les équations du mouvement relatif du point, sans passer par deux théorèmes intermédiaires, sur les accélérations centrifuges composées.

On sait que le mouvement du système invariable (S) peut être considéré comme résultant d'une translation et d'une rotation autour de l'un O de ses points.

Soient (*fig.* 41), à l'instant t,

Fig. 41.



W la vitesse de translation du système (S);

Ox, Oy, Oz les positions de trois axes rectangulaires fixes dans ce système;

n, p, q les composantes suivant ces axes de la rotation instantanée ω du système;

x, y, z les coordonnées du point mobile m dont on veut déterminer le mouvement relatif par rapport à (S);

V, φ la vitesse et l'accélération absolues de m;

Oa une droite égale et parallèle à V menée par O;

Oa' la droite semblable qui se rapporte à l'instant $t + dt$.

On a

$$\varphi = \frac{aa'}{dt},$$

ce qui exprime que φ est la vitesse absolue du point a considéré comme un mobile. Cette vitesse étant la résultante de la vitesse relative de a par rapport à Ox, Oy, Oz, et de la vitesse d'entraînement, on a en projection sur Ox

$$(1) \qquad \varphi_x = \frac{dV_x}{dt} + pV_z - qV_y \quad (^1).$$

D'autre part, si V_r représente la vitesse relative de m par rapport à (S), on a aussi

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} V_x = W_x + pz - qy + V_{rx}, \\ \text{et, de même,} \\ V_y = W_y + qx - nz + V_{ry}, \\ V_z = W_z + ny - px + V_{rz}. \end{array} \right.$$

Si l'on remarque que $\frac{dz}{dt} = V_{rz}$, $\frac{dy}{dt} = V_{ry}$, la première de ces équations donne la suivante

$$\frac{dV_x}{dt} = \frac{dW_x}{dt} + z\frac{dp}{dt} - y\frac{dq}{dt} + pV_{rz} - qV_{ry} + \frac{dV_{rx}}{dt},$$

et si l'on porte cette valeur dans l'équation (1) ainsi que celles de V_y, V_z données par les équations (2), on trouve

$$\varphi_x = \frac{dW_x}{dt} + z\frac{dp}{dt} - y\frac{dq}{dt} + pW_z - qW_y + p(ny - px)$$
$$- q(qx - nz) + \frac{dV_{rx}}{dt} + 2(pV_{rz} - qV_{ry}).$$

---

(1) Nous avions déjà donné cette formule dans notre *Traité de Cinématique pure*, 1862, p. 224.

En y supposant $V_r = 0$, cette formule donnera la composante suivant Ox de l'accélération φ_e, dite d'*entraînement*, du point du système où se trouve actuellement m; d'autre part, $\frac{dV_{rx}}{dt}$ est la composante suivant le même axe de l'accélération relative φ_r de m; on a donc

$$(3) \qquad \varphi_x = \varphi_{ex} + \varphi_{rx} + 2(pV_{rz} - qV_{ry}).$$

Soient

$O\omega$ l'axe instantané de rotation de (S) autour de l'origine O;
OV_r la droite menée en O qui représente V_r en grandeur et en direction;
$\overline{V_rI} = U_r$ la distance du point V_r à l'axe $O\omega$ ou la projection de V_r sur un plan perpendiculaire à cet axe.

L'expression $pV_{rz} - qV_{ry}$ représente, en projection sur Ox, la vitesse $\omega . IV_r$ du point V_r dans son mouvement de rotation autour de $O\omega$. L'accélération $2\omega U_r$ dont la direction est celle de la projection U_r à laquelle on aurait fait subir un quart de révolution autour de $O\omega$ est ce que l'on appelle l'*accélération centripète composée*. On a aussi

$$(4) \qquad \overline{\varphi} = \overline{\varphi_r} + \overline{\varphi_e} + 2\,\overline{\omega U_r}$$

ou

THÉORÈME I. — *L'accélération absolue est la résultante des accélérations relatives d'entraînement et centripète composée.*

On peut encore écrire

$$(5) \qquad \overline{\varphi_r} = \overline{\varphi} - \overline{\varphi_e} + 2\,\overline{\omega U_r},$$

en convenant de considérer l'accélération $2\omega U_r$ (dite *centrifuge composée*) comme étant dirigée suivant la projection U_r de V_r, à laquelle on aurait fait subir un quart de révolution autour de $O\omega$ en sens inverse de ω. Donc :

THÉORÈME II. — *L'accélération relative est la résultante de l'accélération absolue de l'accélération d'entraînement changée de sens, et de l'accélération centrifuge composée.*

Supposons que V_r soit la résultante de plusieurs vitesses

simultanées V'_r, V''_r, ..., et que ω se compose également de plusieurs rotations ω', ω'', ... On a

$$V_{rx} = V'_{rx} + V''_{rx} + \ldots, \qquad p = p' + p'' + \ldots.$$

D'après la formule (3), la projection sur Ox de l'accélération centrifuge composée est

$$\begin{aligned}
2(pV_{rz} - qV_{ry}) &= 2[(p' + p'' + \ldots)(V'_{rz} + V''_{rz} + \ldots) \\
&\qquad - (q' + q'' + \ldots)(V'_{rz} + V''_{rz} + \ldots)] \\
&= 2(p'V'_{rz} - q'V'_{ry}) + 2(p''V'_{rz} - q''V'_{rz}) + \ldots \\
&\quad + 2(p'V''_{rz} - q'V''_{ry}) + 2(p''V''_{rz} - q''V''_{rz}) + \ldots \\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Donc :

THÉORÈME III. — *L'accélération centrifuge composée de m est la résultante de celles que l'on obtient en combinant deux à deux les vitesses relatives composantes avec les rotations composantes.*

Soient

X, Y, Z les composantes de φ suivant Ox, Oy, Oz;
X_e, Y_e, Z_e » φ_e » Ox, Oy, Oz;
α, β, γ les angles formés par $O\omega$ avec Ox, Oy, Oz.

L'équation (3) peut se mettre sous la forme

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned}
&\frac{d^2x}{dt^2} = X - X_e + 2\omega\left(\cos\gamma\,\frac{dy}{dt} - \cos\beta\,\frac{dz}{dt}\right), \\
&\text{et l'on a de même} \\
&\frac{d^2y}{dt^2} = Y - Y_e + 2\omega\left(\cos\alpha\,\frac{dz}{dt} - \cos\gamma\,\frac{dx}{dt}\right), \\
&\frac{d^2z}{dt^2} = Z - Z_e + 2\omega\left(\cos\beta\,\frac{dx}{dt} - \cos\alpha\,\frac{dy}{dt}\right).
\end{aligned} \right.$$

Si, au lieu de considérer le sens positif de la rotation ω en allant de la gauche vers la droite, on suppose le contraire, il suffit de changer le signe de ω dans ces équations qui deviennent celles que nous avons obtenues au Tome I (Ire Partie).

Comme l'accélération centrifuge composée est perpendiculaire à l'élément de chemin, on a

$$\frac{V_r^2 - V_{r_0}^2}{2} = \int \varphi_r \cos(\varphi_r, ds)\, ds - \int \varphi_e \cos(\varphi_e, ds)\, ds.$$

Dans le cas d'un point pesant, l'accélération g est la résultante de l'accélération absolue de la pesanteur et de $-\varphi_e$, c'est-à-dire de l'accélération centrifuge, et, si Oz est la verticale apparente, on a

$$\frac{V_r^2 - V_{r_0}^2}{2} = g(z - z_0).$$

28. *Forme particulière sous laquelle on peut mettre les équations du mouvement relatif d'un point.* — Si ψ désigne l'accélération de (S) dans son mouvement translatoire, on obtiendra, comme ci-dessus,

$$\psi_x = \frac{dW_x}{dt} + pW_z - qW_y.$$

En retranchant cette équation de l'équation (1) et désignant par ζ la résultante de V et $-$ W, on obtient

$$\frac{d\zeta_x}{dt} = \varphi_x - \psi_x + q\zeta_y - p\zeta_z. \tag{7}$$

Les équations (2) peuvent d'ailleurs s'écrire

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \zeta_x + qy - pz, \\ \frac{dy}{dt} &= \zeta_y + nz - qx, \\ \frac{dz}{dt} &= \zeta_z + px - ny. \end{aligned}\right. \tag{8}$$

29. *Application à la détermination de la courbure de quelques courbes susceptibles d'une définition géométrique.* — Supposons, en premier lieu, que l'on veuille trouver le rayon de courbure de la ligne décrite dans l'espace par un point assujetti à se mouvoir uniformément sur une courbe donnée qui tourne elle-même d'un mouvement uniforme autour d'un axe.

Soient

r la distance variable du mobile à l'axe;
R le rayon de courbure de la courbe mobile;
U_r la projection de la vitesse relative V_r sur un plan perpendiculaire à l'axe;
ρ le rayon de courbure de la trajectoire dans l'espace absolu;
$\overline{V} = \overline{V_r} + \overline{\omega r}$ la vitesse absolue.

Les constructions seront supposées exécutées sur deux plans de projection rectangulaires dont l'un sera, par exemple, perpendiculaire à l'axe. L'accélération absolue se composera de l'accélération d'entraînement $\omega^2 r$, de l'accélération relative $\frac{V_r^2}{R}$, de l'accélération $2\omega U_r$ suivant la perpendiculaire à U_r, menée dans le sens de ω. Une construction donnera l'accélération tangentielle φ_t, puis la grandeur et la direction de l'accélération normale φ_n; et enfin l'on aura

$$\rho = \frac{V^2}{\varphi_n},$$

expression que l'on construira facilement.

Occupons-nous maintenant d'une courbe définie par une équation polaire; comme nous l'avons vu, en nous occupant de la construction de la tangente, cette courbe peut être considérée comme étant décrite par un point m animé de la vitesse relative $\frac{dr}{dt}$ suivant le rayon vecteur r, en même temps que ce rayon tourne autour de l'origine O avec une vitesse angulaire constante $\frac{d\theta}{dt}$.

Si $ds = \sqrt{r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}}\, d\theta$ est l'élément d'arc de la courbe, on a

$$V = \frac{ds}{dt}.$$

L'accélération relative et celle d'entraînement donnent la résultante $\frac{d^2 r}{dt^2} - \omega^2 r$ suivant Om. Nous avons de plus l'accé-

lération centripète composée, $2\omega \frac{dr}{dt}$, perpendiculaire à r dans le sens du mouvement. Il vient donc

$$\varphi_n = \left(\omega^2 r - \frac{d^2 r}{dt^2}\right)\frac{r\,d\theta}{ds} + 2\omega \frac{dr}{dt}\frac{dr}{ds} = \frac{1}{\rho}\frac{ds^2}{dt^2};$$

mais on peut prendre $\omega = 1$ ou $dt = d\theta$, et, en remplaçant ensuite ds par son expression donnée ci-dessus, on trouve,

$$\left(r - \frac{d^2 r}{d\theta^2}\right) r + 2\frac{dr^2}{d\theta^2} = \frac{1}{\rho}\left(r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}\right)^{\frac{3}{2}},$$

formule que l'on pourra notamment appliquer aux spirales d'Archimède ($r = a\theta$), hyperbolique $\left(r = \frac{a}{\theta}\right)$ et logarithmique ($r = ae^{m\theta}$).

30. *Courbure d'une surface.* — Soient

AB, AB′ deux courbes planes passant par un même point A où leurs tangentes Ax, Ay sont perpendiculaires entre elles et dont les plans sont normaux aux plans xAy;

Az l'intersection des plans des courbes;

R, R′ leurs rayons de courbure en A.

Concevons qu'un point M parcoure d'un mouvement relatif la courbe AB, tandis que celle-ci se déplace avec un système invariable (S) dont elle fait partie, de manière que son point A se meuve sur AB′.

Soient, pour le point A,

V_r, V_e les vitesses relative et d'entraînement de M;

ψ_r, ψ_e les accélérations tangentielles relative et d'entraînement;

n, p, q les composantes de la rotation instantanée de (S) suivant Ax, Ay, Az;

V la vitesse et Ψ l'accélération tangentielle dans le mouvement absolu de M;

α l'angle formé par V avec V_e ou Ay;

ρ le rayon de courbure de la trajectoire AC dans le mouvement absolu.

On a

$$(a)\qquad \begin{cases} V = \dfrac{V_e}{\cos\alpha}, \\ V_r = V_e \operatorname{tang}\alpha. \end{cases}$$

En modifiant les éléments du mouvement relatif, on fera varier la nature de la trajectoire AC sur la surface engendrée par AB.

L'accélération centripète composée a pour composantes

$$\begin{aligned} -2qV_r &= -2qV_e \operatorname{tang}\alpha \quad \text{suivant } Ay, \\ 2pV_r &= 2pV_e \operatorname{tang}\alpha \quad \text{»} \quad Az. \end{aligned}$$

On a d'ailleurs, suivant Az, les accélérations normales relative et d'entraînement $\dfrac{V_r^2}{R}$, $\dfrac{V_e^2}{R'}$.

La composante tangentielle de l'accélération absolue est

$$(b)\qquad \Psi = (\psi_e - 2qV_e \operatorname{tang}\alpha)\cos\alpha + \psi_r \sin\alpha;$$

sa composante normale à V, située dans le plan xAy, a pour expression

$$(c)\qquad (\psi_e - 2qV_e \operatorname{tang}\alpha)\sin\alpha - \psi_r \cos\alpha.$$

Enfin on a, pour la composante suivant Az de l'accélération normale,

$$(d)\qquad \frac{V_r^2}{R} + \frac{V_e^2}{R'} + 2pV_r.$$

Pour que le plan osculateur en A à AC soit normal à la surface, il faut que l'expression (c) soit nulle ou que

$$(e)\qquad \psi_r = (\psi_e - 2qV_e \operatorname{tang}\alpha)\operatorname{tang}\alpha,$$

et, par suite,

$$(f)\qquad \Psi = \frac{\psi_e - 2qV_e \operatorname{tang}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\psi_r}{\sin\alpha}.$$

On a alors

$$\frac{V^2}{\rho} = \frac{V_r^2}{R} + \frac{V_e^2}{R'} + 2pV_r,$$

ou, en ayant égard aux valeurs (a),

$$(g)\qquad \frac{1}{\rho} = \frac{\sin^2\alpha}{R} + \frac{\cos^2\alpha}{R'} + \frac{2p}{V_e}\sin\alpha\cos\alpha.$$

On remarquera que l'on peut supposer $n = 0$, $q = 0$, et alors le plan de AB se déplace parallèlement à lui-même. Par une considération d'infiniment petits à laquelle nous ne nous arrêterons pas, on arrive à conclure que la formule (g) s'applique à la courbure d'une section normale faite dans une surface dont AB, AB′ sont deux autres sections normales données.

Soient $ds = AA'_1$ un élément de AB′; $d\varepsilon$ l'angle formé avec Ax par la tangente en A'_1 à la section de la surface faite par un plan mené en A'_1 perpendiculairement à Ay. On a

$$p\,dt = d\varepsilon, \qquad V_e = \frac{ds}{dt}$$

et

$$(h) \qquad \frac{p}{V_e} = \frac{d\varepsilon}{ds} = \frac{1}{D},$$

D étant ce que l'on appelle *rayon d'inflexion* de la surface dans la direction de Ay, ce qui permet de faire disparaître les éléments du mouvement dans la formule (g).

Soient x, y les coordonnées du point de la direction de V qui se trouve à la distance $\sqrt{\rho}$ de A; on a $\cos\alpha = \frac{y}{\sqrt{\rho}}$, $\sin\alpha = \frac{x}{\sqrt{\rho}}$ et, par suite,

$$(i) \qquad 1 = \frac{y^2}{R'} + \frac{x^2}{R} + \frac{2xy}{D},$$

équation d'une conique dont les axes principaux correspondent aux sections normales *principales* de la surface pour lesquelles les courbures sont maximum et minimum. Cette conique correspond à l'indicatrice de Ch. Dupin.

Pour trouver le rayon de courbure ρ d'une section oblique menée, par exemple, suivant Ay, nous supposerons $V_r = 0$ ou $\alpha = 0$, sans admettre que ψ_r, ψ_e soient nuls. L'accélération normale de la trajectoire de M se compose de $\frac{V_e^2}{R'}$ suivant Az et de l'accélération (c) ou $-\psi_r$ suivant Ax. En appelant θ l'angle formé avec le plan xAy par le plan osculateur de la trajectoire, la composante suivant Az de l'accélération nor-

male a aussi pour valeur $\frac{V^2}{\rho}\cos\theta$, et comme, d'après ($a$), $V = V_e$, il vient

$$R = R'\cos\theta,$$

ce qui donne le théorème de Meusnier.

Supposons que, la surface étant à courbures opposées, Ay soit l'une des directions pour lesquelles la courbure de la section normale est nulle. L'équation (g), eu égard à la relation (h), devient

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sin^2\alpha}{R} + \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{D}.$$

Le plan tangent xAy déterminera dans la surface une *ligne asymptotique* tangente à Oy et dont le centre de courbure se trouvera sur Ox. Soient $d\eta$ et τ l'angle et le rayon de torsion de la ligne asymptotique au point A, et considérons, à partir de ce point, trois éléments consécutifs ds de la ligne; on a $\tau = \frac{ds}{d\eta}$ et l'on reconnaît sans peine que l'angle formé par la normale au troisième élément ou correspondant à $2\,ds$ avec le plan xAy est égal à $d\eta$; d'où il résulte que $D = \frac{2\,ds}{d\eta} = 2\tau$.

Si δ est l'angle des asymptotes de l'indicatrice ou la valeur de α correspondant à $\rho = \infty$, il vient

$$\operatorname{tang}\delta = -\frac{2R}{D} = -\frac{R}{\tau};$$

par suite,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sin\alpha}{R}\,\frac{\sin(\alpha-\delta)}{\cos\delta}.$$

En désignant par m la puissance de l'indicatrice, l'équation polaire de cette courbe correspond à

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{m}\,\frac{\sin(\delta-\alpha)}{\sin^2\delta}\sin\alpha.$$

De la comparaison des deux dernières équations on conclut

$$m\sin\delta = -R\cot\delta$$

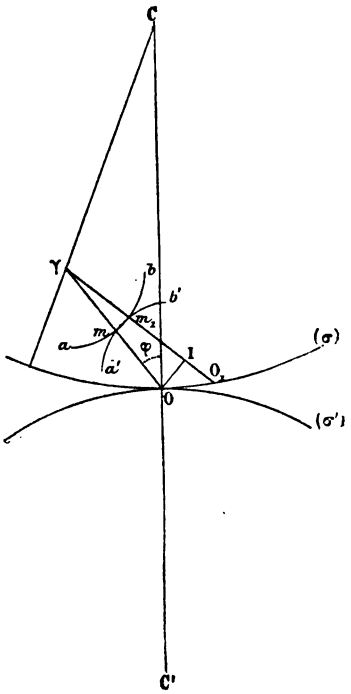
et, par suite,

$$\tau = m\sin\delta,$$

résultat qu'il est facile de traduire en langue ordinaire.

31. *Courbure de l'enveloppe d'une courbe plane.* — Soient (*fig.* 42)

Fig. 42.



ab la position de la courbe mobile à l'instant t;
$a'b'$ son enveloppe;
(σ) le lieu des centres instantanés de rotation de la figure invariable à laquelle appartient ab dans le plan de cette figure;
(σ') le lieu de ces centres dans le plan fixe de $a'b'$;
O le point de contact de (σ), (σ') à l'instant t;
O_1 la position sur (σ) du centre instantané à l'instant $t+dt$;
$Om = p$ la normale à ab menée du point O, m étant le point de contact de ab, $a'b'$;
$R = OC$, $R' = OC'$ les rayons de courbure en O de (σ) et (σ'). R étant considéré comme négatif si (σ) est intérieur à (σ');
φ l'angle mOC;

$\rho = \gamma m$, $\rho' = \gamma' m$ les rayons de courbure en m de ab, $a'b'$;
$U = \frac{OO_1}{dt}$ la vitesse du centre instantané O.

L'enveloppe $a'b'$ peut être considérée comme engendrée par un point qui se meut d'un mouvement relatif sur ab avec une certaine vitesse $w = \frac{mm_1}{dt}$, le point m_1 se trouvant sur la direction de γO_1.

La composante suivant mO de l'accélération d'entraînement est

$$\omega^2 p - \omega U \cos\varphi.$$

Les accélérations apparentes, centripète composée et relative, donnent, suivant la même direction, la composante

$$2\omega w - \frac{w^2}{\rho},$$

et, comme la vitesse absolue de m est $\omega p + w$, il vient

$$(a) \qquad \frac{(w + \omega p)^2}{\rho'} = \omega^2 p - \omega U \cos\varphi + 2\omega w - \frac{w^2}{\rho}.$$

Si I est la projection de O sur $\gamma m_1 O_1$, on a

$$OI = OO_1 \cos\varphi = U\,dt \cos\varphi,$$

$$mm_1 = OI \frac{\rho}{\rho + p};$$

d'où

$$(b) \qquad w = U \cos\varphi \frac{\rho}{\rho + p},$$

$$(c) \qquad U \cos\varphi = \frac{\rho + p}{\rho} w.$$

Si l'on porte la valeur (c) dans la formule (a), il vient, après avoir supprimé le facteur $\omega p + w$,

$$\frac{\omega p + w}{\rho'} = \omega - \frac{w}{\rho},$$

et, après avoir remplacé w par sa valeur (b),

$$\frac{\omega}{U} = \left(\frac{1}{\rho' - p} + \frac{1}{\rho + p}\right) \cos\varphi$$

ou, en se reportant au n° 5,

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \left(\frac{1}{\rho + p} + \frac{1}{\rho' - p}\right)\cos\varphi,$$

formule que nous avons obtenue d'une autre manière au Tome III (p. 23), auquel nous renverrons pour les développements qu'elle comporte.

32. *Tangente et courbure en un point du lieu des centres de courbure d'une courbe* (σ) *qui roule sur une courbe fixe* (σ'). — Soient

$d\varepsilon$, $d\varepsilon'$ les angles de contingence de (σ), (σ') en leur point de contact O;

$R = \frac{ds}{d\varepsilon}$, $R' = \frac{ds}{d\varepsilon'}$ les rayons de courbure correspondants;

$\rho = \frac{dR}{d\varepsilon}$, $\rho' = \frac{dR'}{d\varepsilon'}$ les rayons de courbure des développées de (σ), (σ');

$\gamma = \frac{d\rho}{d\varepsilon}$ le rayon de courbure de la seconde développée de (σ).

Le lieu du centre de courbure C de la courbe (σ) peut être considéré comme étant la trajectoire sur le plan fixe de (σ') d'un point entraîné dans le roulement de la courbe (σ), décrivant la développée de cette courbe avec la vitesse relative

$$(a) \qquad \frac{dR}{dt} = \frac{dR}{d\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dt} = \rho\frac{d\varepsilon}{dt}.$$

D'autre part, en supposant, pour fixer les idées, que (σ) et (σ') opposent leurs convexités, on a

$$(b) \qquad \omega = \frac{d\varepsilon + d\varepsilon'}{dt} = \frac{d\varepsilon}{dt}\left(1 + \frac{d\varepsilon'}{d\varepsilon}\right) = \frac{d\varepsilon}{dt}\left(1 + \frac{R}{R'}\right);$$

d'où, pour la vitesse d'entraînement,

$$R\omega = R\left(1 + \frac{R}{R'}\right)\frac{d\varepsilon}{dt}.$$

Il résulte de (a) et (b) que la direction de la tangente au lieu décrit par C est celle de la résultante de la longueur ρ, portée à partir de C sur la direction de OC, et de la droite

$R\left(1+\frac{R}{R'}\right)$ perpendiculaire à cette direction. Si l'on pose

$$\delta = \sqrt{\rho^2 + \left(R + \frac{R^2}{R'}\right)^2},$$

la vitesse absolue du point mobile est

$$\delta \frac{d\varepsilon}{dt}.$$

Pour trouver le rayon de courbure du lieu, nous remarquerons que l'accélération d'entraînement est

$$-\omega^2 R + \omega \frac{ds}{dt} = -\omega^2 R + \omega R \frac{d\varepsilon}{dt}$$

et est dirigée suivant le prolongement de OC; l'accélération relative a pour composantes $\frac{d}{dt}\left(\rho \frac{d\varepsilon}{dt}\right)$, suivant la même direction, et $-\rho \frac{d\varepsilon^2}{dt^2}$, parallèle à la tangente en O à (σ), (σ'); l'accélération centripète composée, représentée par $2\omega\rho \frac{d\varepsilon}{dt}$, est également parallèle à la tangente en O.

Si donc on désigne par x le rayon de courbure de la trajectoire, on a

$$\frac{\delta^2 \frac{d\varepsilon^2}{dt^2}}{x} = \left[-\omega^2 R + \omega R \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{d}{dt}\left(\rho \frac{d\varepsilon}{dt}\right)\right] \frac{\left(1+\frac{R}{R'}\right)R}{\delta} + \left(\rho \frac{d\varepsilon^2}{dt^2} - 2\omega\rho \frac{d\varepsilon}{dt}\right)\frac{\rho}{\delta}.$$

On a maintenant

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \omega \frac{R'}{R+R'},$$

$$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = \frac{\omega\left(R\frac{dR'}{dt} - R'\frac{dR}{dt}\right)}{(R+R')^2} = \frac{\omega}{(R+R')^2}\left(R\frac{dR'}{d\varepsilon'}\frac{d\varepsilon'}{d\varepsilon} - R'\frac{dR}{d\varepsilon}\right)\frac{d\varepsilon}{dt}$$

$$= \frac{1}{(R+R')R'^2}(R^2\rho' - R'^2\rho)\frac{d\varepsilon^2}{dt^2},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\rho\frac{d\varepsilon}{dt}\right) = \rho\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} + \frac{d\varepsilon}{dt}\frac{d\rho}{dt} = \rho\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} + \frac{d\varepsilon^2}{dt^2}\frac{d\rho}{d\varepsilon}$$

$$= \left[\frac{\rho(R^2\rho' - R'^2\rho)}{(R+R')R'^2} + \gamma\right]\frac{d\varepsilon^2}{dt^2};$$

par suite,

$$\frac{\delta^3}{x}=\left[(R+R')\frac{R^2}{R'}+\frac{\rho(R^2\rho'-R'^2\rho)}{(R+R')R'^2}+\gamma R'\right]\frac{(R+R')R}{R'^2}-\frac{\rho^2(R'+2R)}{R'},$$

d'où l'on déduira x.

NOTE.

SUR L'EXTENSION DES ÉQUATIONS DE LAGRANGE AU MOUVEMENT RELATIF.

Soient

$(m, m_1, \ldots)$ un système matériel à liaisons dont le mouvement est rapporté aux axes mobiles Ox, Oy, Oz;

U un potentiel fonction de $x, y, z, x_1, \ldots$, dont dérivent les forces extérieures, y compris les actions moléculaires qui sollicitent le système;

$L_1 = 0$, $L_2 = 0$, ... les équations de liaisons.

En nous reportant pendant quelques instants au n° 28 de l'Appendice, nous avons d'abord

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \zeta_x + qy - pz,\\ \frac{dy}{dt} &= \zeta_y + nz - qx,\\ \frac{dz}{dt} &= \zeta_z + px - ny. \end{aligned}\right.$$

En multipliant par m l'équation (7) du même numéro, $m\varphi_x$ se composera de $\frac{\partial U}{\partial x}$ et de la force de liaisons [1]

$$\lambda_1\frac{\partial L_1}{\partial x}+\lambda_2\frac{\partial L_2}{\partial x}+\ldots,$$

---

[1] Page 102.

et l'on obtiendra

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} m\frac{d\zeta_x}{dt} &= \frac{\partial U}{\partial x} - m\psi_x + m(q\zeta_y - p\zeta_z) + \lambda_1\frac{\partial L_1}{\partial x} + \lambda_2\frac{\partial L_2}{\partial x} + \ldots,\\ m\frac{d\zeta_y}{dt} &= \frac{\partial U}{\partial y} - m\psi_y + m(n\zeta_z - q\zeta_x) + \lambda_1\frac{\partial L_1}{\partial y} + \lambda_2\frac{\partial L_2}{\partial y} + \ldots,\\ m\frac{d\zeta_z}{dt} &= \frac{\partial U}{\partial z} - m\psi_z + m(p\zeta_x - n\zeta_y) + \lambda_1\frac{\partial L_1}{\partial z} + \lambda_2\frac{\partial L_2}{\partial z} + \ldots. \end{aligned}\right.$$

Si l'on substitue dans la demi-force vive [1]

$$T = \frac{1}{2}\sum m\left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}\right),$$

qui se rapporte au mouvement relatif, les valeurs (1), on trouve

$$(3)\qquad T = T_1 + T_2 + G,$$

en posant

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} T_1 &= \Sigma m[(qy - pz)\zeta_x + (nz - qx)\zeta_y + (px - ny)\zeta_z],\\ T_2 &= \tfrac{1}{2}\Sigma m[\zeta_x^2 + \zeta_y^2 + \zeta_z^2],\\ G &= \tfrac{1}{2}\Sigma m[(qy - pz)^2 + (nz - qx)^2 + (px - ny)^2]. \end{aligned}\right.$$

Si l'on pose encore

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} K &= -\psi_x\Sigma mx - \psi_y\Sigma my - \psi_z\Sigma mz,\\ U + K + G &= U_1, \end{aligned}\right.$$

on a

$$(6)\qquad U_1 - T = U - T_1 - T_2 + K,$$

et l'on reconnaît facilement que les équations (1) et (2) se ramènent aux suivantes :

$$(1')\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial T}{\partial m\zeta_x},\\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial T}{\partial m\zeta_y},\\ \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial T}{\partial m\zeta_z} \end{aligned}\right.$$

---

[1] Ce qui suit est, à quelques différences près, la reproduction d'une partie d'un remarquable Mémoire de Bour, inséré au *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1863.

et

$$(2')\quad \left\{\begin{aligned} m\frac{d\zeta_x}{dt} &= \frac{\partial(U_1-T)}{\partial x} + \lambda_1\frac{\partial L_1}{\partial x} + \lambda_2\frac{\partial L_2}{\partial x} + \ldots,\\ m\frac{d\zeta_y}{dt} &= \frac{\partial(U_1-T)}{\partial y} + \lambda_1\frac{\partial L_1}{\partial y} + \lambda_2\frac{\partial L_2}{\partial y} + \ldots,\\ m\frac{d\zeta_z}{dt} &= \frac{\partial(U_1-T)}{\partial z} + \lambda_1\frac{\partial L_1}{\partial z} + \lambda_2\frac{\partial L_2}{\partial z} + \ldots. \end{aligned}\right.$$

Soient u, u_1, ..., $u_{\nu-1}$ les variables indépendantes au moyen desquelles on peut exprimer les coordonnées; on a, par exemple,

$$(a)\qquad \frac{\partial L_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial L_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial L_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial L_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial u} + \ldots = 0.$$

En ajoutant les équations (2'), respectivement multipliées par $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$, puis le résultat obtenu à ceux qui s'en déduisent pour m_1, m_2, ..., on obtient, en ayant égard aux relations telles que (a) :

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum m\left(\frac{d\zeta_x}{dt}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{d\zeta_y}{dt}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{d\zeta_z}{dt}\frac{\partial z}{\partial u}\right)\\ &\quad = \sum\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial U_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial U_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\right)\\ &\qquad - \sum\left(\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial T}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\right). \end{aligned}\right.$$

Comme U_1 ne dépend que des coordonnées x, y, ..., c'est une fonction de u, u_1, ..., et le premier terme du second membre de l'équation (7) n'est autre chose que $\frac{\partial U_1}{\partial u}$.

D'après les formules (3) et (4), T est une fonction de ζ_x, ζ_y, ζ_z, ... et de x, y, z, ..., et l'on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial u} = &\sum\left(\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial T}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\right)\\ &+ \sum\left(\frac{\partial T}{\partial \zeta_x}\frac{\partial \zeta_x}{\partial u} + \frac{\partial T}{\partial \zeta_y}\frac{\partial \zeta_y}{\partial u} + \frac{\partial T}{\partial \zeta_z}\frac{\partial \zeta_z}{\partial u}\right). \end{aligned}$$

On déduit de là la valeur du second terme du second

membre de l'équation (7), laquelle devient

$$\sum m\left(\frac{\partial\zeta_x}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial\zeta_y}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial\zeta_z}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\right)$$
$$-\sum\left(\frac{\partial T}{\partial\zeta_x}\frac{\partial\zeta_x}{\partial u}+\frac{\partial T}{\partial\zeta_y}\frac{\partial\zeta_y}{\partial u}+\frac{\partial T}{\partial\zeta_z}\frac{\partial\zeta_z}{\partial u}\right)=\frac{\partial(U_1-T)}{\partial u}$$

ou

$$(7')\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\sum m\left(\zeta_x\frac{\partial x}{\partial u}+\zeta_y\frac{\partial y}{\partial u}+\zeta_z\frac{\partial z}{\partial u}\right)\\&-\sum m\left(\zeta_x\frac{d}{dt}\frac{\partial x}{\partial u}+\zeta_y\frac{d}{dt}\frac{\partial y}{\partial u}+\zeta_z\frac{d}{dt}\frac{\partial z}{\partial u}\right)\\&-\sum\left(\frac{\partial T}{\partial\zeta_x}\frac{\partial\zeta_x}{\partial u}+\frac{\partial T}{\partial\zeta_y}\frac{\partial\zeta_y}{\partial u}+\frac{\partial T}{\partial\zeta_z}\frac{\partial\zeta_z}{\partial u}\right)=\frac{\partial(U_1-T)}{\partial u}.\end{aligned}\right.$$

Nous poserons $x'=\frac{dx}{dt}$, ..., et $u'=\frac{du}{dt}$. Nous aurons, en différentiant x par rapport à t,

$$(b)\qquad x'=\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}+\ldots=\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial x}{\partial u}u'+\frac{\partial x}{\partial u_1}u'_1+\ldots;$$

d'où

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\partial x'}{\partial u'}$$

ou, en vertu de la première des équations (1),

$$(c)\qquad\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\partial\zeta_x}{\partial u'}.$$

Nous avons aussi

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial u_1}\frac{du_1}{dt}$$
$$=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial u}u'+\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial u_1}u'_1+\ldots,$$

ou, en vertu de la formule (b),

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\partial x'}{\partial u}$$

ou encore, en se reportant à la première des équations (1'),

$$(d)\qquad m\frac{d}{dt}\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial T}{\partial\zeta_x}.$$

En ayant égard aux relations (c) et (d) et à leurs analogues,

l'équation ($7'$) devient

$$\frac{d}{dt}\sum m\left(\zeta_x\frac{\partial\zeta_x}{\partial u'}+\zeta_y\frac{\partial\zeta_y}{\partial u'}+\zeta_z\frac{\partial\zeta_z}{\partial u'}\right)$$
$$-\sum\left(\zeta_x\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial T}{\partial\zeta_x}+\zeta_y\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial T}{\partial\zeta_y}+\zeta_z\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial T}{\partial\zeta_z}\right)$$
$$-\sum\left(\frac{\partial T}{\partial\zeta_x}\frac{\partial\zeta_x}{\partial u}+\frac{\partial T}{\partial\zeta_y}\frac{\partial\zeta_y}{\partial u}+\frac{\partial T}{\partial\zeta_z}\frac{\partial\zeta_z}{\partial u}\right)=\frac{\partial(U_1-T)}{\partial u}$$

ou

$$(e)\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T_2}{\partial u'}-\frac{\partial}{\partial u}\sum\left(\zeta_x\frac{\partial T}{\partial\zeta_x}+\zeta_y\frac{\partial T}{\partial\zeta_y}+\zeta_z\frac{\partial T}{\partial\zeta_z}\right)=\frac{\partial(U_1-T)}{\partial u}.$$

Comme T_2, T_1 sont des fonctions homogènes du second et du premier degré des $\zeta_x, \ldots$, on a

$$\sum\left(\zeta_x\frac{\partial T_2}{\partial\zeta_x}+\zeta_y\frac{\partial T_2}{\partial\zeta_y}+\zeta_z\frac{\partial T_2}{\partial\zeta_z}\right)=2T_2,$$
$$\sum\left(\zeta_x\frac{\partial T_1}{\partial\zeta_x}+\zeta_y\frac{\partial T_1}{\partial\zeta_y}+\zeta_z\frac{\partial T_1}{\partial\zeta_z}\right)=T_1;$$

d'où, en ajoutant et remarquant que G est indépendant des $\zeta_x, \ldots$,

$$\sum\left(\zeta_x\frac{\partial T}{\partial\zeta_x}+\zeta_y\frac{\partial T}{\partial\zeta_y}+\zeta_z\frac{\partial T}{\partial\zeta_z}\right)=2T_2+T_1;$$

et l'équation (e) devient

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_2}{\partial u'}=\frac{\partial}{\partial u}(U_1-T+2T_2+T_1),$$

ou, vu (6),

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T_2}{\partial u'}-\dfrac{\partial T_2}{\partial u}=\dfrac{\partial(U+K)}{\partial u}\quad (^1),\\ \text{et, de même,}\\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T_2}{\partial u'_1}-\dfrac{\partial T_2}{\partial u_1}=\dfrac{\partial(U+K)}{\partial u_1}.\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

---

(1) M. Ph. Gilbert démontre de la manière suivante cette équation : Concevons que l'on imprime au système d'axes Ox, Oy, Oz une vitesse et une accélération égales et contraires à W et ψ. Le point m sera animé de la vitesse ζ, et sera soumis, en sus de la force extérieure dérivant de U, à la force $-m\psi$ dérivant du potentiel K. Le point O étant devenu immobile, les équations de Lagrange reçoivent leur application en y remplaçant T par T_2 et U par $U+K$.

Telles sont les équations qu'il s'agissait d'obtenir et qui comprennent comme cas particulier celles de Lagrange en y faisant $\psi_x = \psi_y = \psi_z = 0$, $n = p = q = 0$ ou $T_2 = T$, $K = 0$.

Ces équations ne seront applicables que dans un nombre restreint de cas; car, en général, les forces extérieures ne pourront pas dériver d'un potentiel des coordonnées relatives.

2. *Mouvement relatif d'un système matériel pesant par rapport à la Terre.* — Nous admettrons que l'espace terrestre dans lequel s'étend le mouvement du système est assez restreint pour qu'on puisse considérer comme constantes, en grandeur et en direction, les accélérations absolues et d'entraînement des points du système.

Soient

R le rayon terrestre;

ω la rotation diurne dont on ne conservera la deuxième puissance qu'autant qu'elle sera multipliée par R;

G l'accélération de la pesanteur absolue à la surface de la Terre;

O un point de la région superficielle dans laquelle se trouve l'observateur;

Oz la direction de la pesanteur apparente g, qui est la résultante de G et de l'accélération centrifuge $\omega^2 R \cos\lambda$, en désignant par λ la latitude ou l'inclinaison de g sur l'équateur;

Ox la méridienne (perpendiculaire en O à Oz dans le plan méridien) dirigée vers l'équateur;

Oy la tangente au parallèle menée dans le sens de la rotation diurne.

On a

$$g = G - \omega^2 R \cos^2\lambda,$$

$$n = \omega \cos\lambda, \quad p = 0, \quad q = \omega \sin\lambda,$$

$$\zeta_x = x' - \omega \sin\lambda . y, \quad \zeta_y = y' + \omega(x \cos\lambda - z \cos\lambda), \quad \zeta_z = z' + \omega \cos\lambda . y.$$

$$(9) \quad T = \frac{1}{2} \Sigma m [x'^2 + y'^2 + z'^2 + 2\omega \sin\lambda (xy' - yx') + 2\omega \cos\lambda (yz' - zy')].$$

Comme ψ est l'accélération centripète du point O, on a aussi

$$\psi_x = -\omega^2 R \cos\lambda \sin\lambda, \qquad \psi_y = 0, \qquad \psi_z = \omega^2 R \cos^2\lambda,$$
$$K = \omega^2 R \cos\lambda (\sin\lambda \Sigma mx - \cos\lambda \Sigma mz).$$

Les composantes de G suivant Ox et Oz étant respectivement $-\omega^2 R \sin\lambda \cos\lambda$ et G, on voit que

$$U = G \Sigma mz - \omega^2 R \sin\lambda \cos\lambda \Sigma mx;$$

par suite,

$$(10) \qquad U + K = (G - \omega^2 R \cos^2\lambda) \Sigma mz = g \Sigma mz.$$

3. *Mouvement apparent des projectiles.* — Si le système matériel se réduit à un point libre m, les variables indépendantes seront x, y, z, et les équations (8), en y substituant les valeurs (9) et (10), donnent les suivantes

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\omega \sin\lambda \frac{dy}{dt} = 0,$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\omega \left(\sin\lambda \frac{dx}{dt} - \cos\lambda \frac{dz}{dt}\right) = 0,$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} + 2\omega \cos\lambda \frac{dy}{dt} = g,$$

qui ne sont autre chose que celles qui ont été obtenues à la page 116 du Tome I, en y changeant toutefois le signe de y en raison de ce que les parties positives de l'axe Oy sont de sens opposé dans les deux circonstances où l'on s'est placé.

4. *Mouvement d'un solide de révolution pesant dont un point* O *de l'axe est fixe sur la Terre.* — Soient

$O\chi$ l'axe de révolution du corps;
Ou sa projection sur le plan xOy;
$O\eta$ la perpendiculaire à Ou dans ce plan;
$O\zeta$ la perpendiculaire à $O\chi$ dans le plan zOu;
l la distance du centre de gravité G du corps au point O;
M la masse du corps;
A, B ses moments d'inertie par rapport à $O\chi$ et une perpendiculaire quelconque en O à $O\chi$;
θ, φ les angles $\chi O\zeta$, uOx;

$O\eta'$, $O\zeta'$ deux axes rectangulaires perpendiculaires à $O\chi$, fixes dans le corps;

ϖ l'angle formé par le plan $\chi O\eta'$ avec le plan $\chi O u$.

Les coordonnées x, y, z pourront s'exprimer au moyen des coordonnées constantes χ, η', ζ' et des angles θ, φ, ϖ qui seront ainsi les variables indépendantes.

Les composantes de la rotation instantanée de M suivant $O\chi$, $O\eta$, $O\zeta$ étant ϖ', θ', $\varphi' \sin\theta$ [1], l'équation (9) devient, en désignant par μ le moment de la quantité de mouvement de m par rapport au point O,

$$(9') \qquad T_2 = \frac{1}{2}(A\varpi'^2 + B\theta'^2 + B\sin^2\theta.\varphi'^2) + \omega\sin\lambda\,\Sigma\mu_z + \omega\cos\lambda\,\Sigma\mu_x.$$

L'équation (10) revient d'ailleurs à la suivante :

$$(10') \qquad U + K = Mgl\cos\theta.$$

Nous avons maintenant

$$\mu_u = \mu_\chi \sin\theta - \mu_\zeta \cos\theta,$$
$$\mu_z = \mu_\chi \cos\theta + \mu_\zeta \sin\theta,$$
$$\mu_x = \mu_u \cos\varphi - \mu_\eta \sin\varphi = (\mu_\chi \sin\theta - \mu_\zeta \cos\theta)\cos\varphi - \mu_\eta \sin\varphi.$$

Si l'on remarque $\Sigma\mu_\chi = A\varpi'$, $\Sigma\mu_\eta = B\theta'$, $\Sigma\mu_\zeta = B\sin\theta.\varphi'$, l'équation (9') devient, en ayant égard aux valeurs ci-dessus de μ_x, μ_z,

$$(9'') \quad \left\{ \begin{aligned} T_2 = \frac{1}{2}(A\varpi'^2 + B\theta'^2 + B\sin^2\theta\,\varphi'^2) \\ + \omega\sin\lambda(A\varpi'\cos\theta + B\varphi'\sin^2\theta) \\ + \omega\cos\lambda\,[(A\varpi'\sin\theta - B\sin\theta\cos\theta\,\varphi')\cos\varphi - B\theta'\sin\varphi]. \end{aligned} \right.$$

Nous avons d'abord

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_2}{\partial \varpi'} = 0$$

ou

$$\frac{\partial T_2}{\partial \varpi'} = \text{const.},$$

---

[1] La composante de la rotation suivant $O\zeta$ étant décomposée en deux autres, l'une suivant $O\chi$ et l'autre suivant Oz, cette dernière est évidemment égale à $\frac{d\varphi}{dt}$.

ou encore, en désignant par n_1 une constante,

$$(11)\qquad \varpi' + \omega(\sin\lambda\cos\theta + \cos\lambda\sin\theta\cos\varphi) = n_1.$$

Nous ferons $\varpi' = n_1$ dans les termes en ω de la valeur (9″). Les deux autres équations du mouvement sont

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} &B\left(\frac{d^2\theta}{dt^2} - \sin\theta\cos\theta\frac{d\varphi^2}{dt^2}\right)\\ &\quad - An_1\omega(\sin\lambda\sin\theta - \cos\lambda\cos\theta\cos\varphi)\\ &\quad - 2B\omega\sin\theta(\sin\lambda\cos\theta + \cos\lambda\sin\theta\cos\varphi)\frac{d\varphi}{dt} = -Mgl\sin\theta,\end{aligned}\right.$$

$$(13)\qquad \frac{d}{dt}\sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{dt} + \omega\sin\lambda\right) + 2\omega\cos\lambda\cos\varphi\sin^2\theta\frac{d\theta}{dt} = 0.$$

En supposant $n_1 = 0$ et θ suffisamment petit, on se trouvera dans la condition du pendule de Foucault, et les équations ci-dessus se réduiront aux suivantes

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} - \sin\theta\cos\theta\frac{d\varphi^2}{dt^2} - 2\omega\sin\lambda\sin\theta\cos\theta = -\frac{g}{l_1}\sin\theta,$$

$$\sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{dt} + \omega\sin\lambda\right) = \text{const.},$$

en désignant par l_1 la longueur du pendule synchrone ordinaire.

Si l'on pose

$$\psi = \varphi + \omega\sin\lambda t,$$

on a

$$\frac{d\varphi^2}{dt^2} = \frac{d\psi^2}{dt^2} - 2\omega\sin\lambda\frac{d\psi}{dt},$$

par suite,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} - \sin\theta\cos\theta\frac{d\psi^2}{dt^2} = -\frac{g}{l_1}\sin\theta,$$

$$\sin^2\theta\frac{d\psi}{dc} = \text{const.},$$

équations qui sont celles du mouvement d'un pendule conique de longueur l_1 (p. 107) dont les coordonnées angulaires sont θ et ψ, ce qui est conforme au résultat obtenu au Tome I (p. 111) pour le pendule simple.

Les formules (12) et (13) s'appliquent au gyroscope Foucault, en faisant dans la première $l = 0$ et négligeant le terme

en $\omega \sin\theta \frac{d\varphi}{dt}$ en raison de la valeur importante attribuée à n_1. Mais, comme leur interprétation présente quelques difficultés, l est préférable d'y substituer celles que l'on obtient en dirigeant Oz suivant ω et Ox suivant le rayon du parallèle. Avec un peu d'attention, on voit que les nouvelles équations ne sont autre chose que les équations (12) ou (13), dans lesquelles on supposerait $\lambda = 90°$.

On a donc

$$B\left(\frac{d^2\theta}{dt^2} - \sin\theta\cos\theta\frac{d\varphi^2}{dt^2}\right) = -An_1\omega\sin\theta,$$

$$\frac{d}{dt}\sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{dt} + \omega\right) = 0,$$

ou

$$B\left(\frac{d^2\theta}{dt^2} - \sin\theta\cos\theta\frac{d\psi^2}{dt^2}\right) = -An_1\omega\sin\theta,$$

$$\sin^2\theta\frac{d\psi}{dt} = \text{const.},$$

équations qui ont la forme de celle du pendule conique.

Nous renverrons, pour plus de détails, au dernier Chapitre du Tome I.

CHAPITRE VI.

DE L'ACCÉLÉRATION DU SECOND ORDRE.

§ I. — *Accélération du second ordre d'un point.*

33. La dérivée géométrique de la vitesse par rapport au temps ou l'accélération est, en dehors du chemin parcouru et de la vitesse, le seul élément linéaire qui intervient en Mécanique.

Mais, en Géométrie, on peut aller plus loin et considérer la dérivée géométrique de l'accélération ou l'*accélération du second ordre*, la dérivée géométrique de cette dernière accélération, c'est-à-dire celle *du troisième ordre*, et ainsi de suite. Mais nous nous bornerons à étudier les accélérations du second ordre.

Soient

$V = \frac{ds}{dt}$ la vitesse d'un point mobile à l'instant t;

$d\alpha$, $d\varepsilon$ les angles de contingence et de torsion de la trajectoire;

ρ, ρ_1 les rayons de courbure et de torsion de cette courbe.

On a

$$\rho = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{V}{\frac{d\alpha}{dt}}, \qquad \rho_1 = \frac{ds}{d\varepsilon} = \frac{V}{\frac{d\varepsilon}{dt}}.$$

L'accélération tangentielle du premier ordre $\frac{dV}{dt}$ donne les accélérations du second ordre,

$\frac{d^2V}{dt^2}$ suivant la tangente,

$\frac{dV}{dt}\frac{d\alpha}{dt} = \frac{V}{\rho}\frac{dV}{dt}$ dans la direction du centre de courbure.

Soient (*fig.* 43)

ab, *bc*, *cd* trois éléments consécutifs de la trajectoire, égaux à ds;

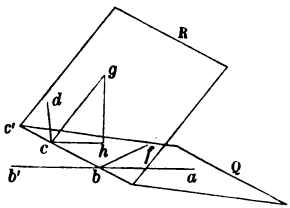
(Q), (R) les plans osculateurs *abc*, *bcd*;

$bf = \rho$ le rayon de courbure en *b* perpendiculaire à *ab* dans le plan (Q);

$cg = \rho + d\rho$ le rayon de courbure en *c*, perpendiculaire à *bc* dans le plan (R);

ch la projection de *cg* sur (Q).

Fig. 43.



L'accélération normale en *c*,

$$\frac{V^2}{\rho} + d\frac{V^2}{\rho},$$

donnera la même accélération suivant *ch* et l'accélération

$$\left(\frac{V^2}{\rho} + d\frac{V^2}{\rho}\right) d\varepsilon = \frac{V^2 d\varepsilon}{\rho} = \frac{V^3}{\rho\rho_1}\, dt,$$

suivant la *binormale hg* [axe du plan osculateur (Q)].

L'angle formé par *ch* avec *bf* étant $d\alpha$, l'accélération suivant *ch* donnera les composantes

$$\frac{V^2}{\rho} + d\frac{V^2}{\rho^2} \qquad \text{suivant } bf.$$

$$-\left(\frac{V^2}{\rho} + d\frac{V^2}{\rho}\right) d\alpha = -\frac{V^3}{\rho^2}\, dt \qquad \text{» } ab.$$

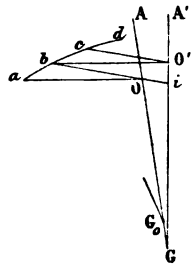
Si nous désignons par $\mathcal{A}_t$, $\mathcal{A}_n$, $\mathcal{A}_b$ les composantes totales de l'accélération du second ordre suivant la tangente, la normale

principale et la binormale, nous aurons, par ce qui précède,

$$(1)\quad \begin{cases} \mathcal{A}_t = \dfrac{d^2V}{dt^2} - \dfrac{V^3}{\rho^2}, \\ \mathcal{A}_n = \dfrac{V}{\rho}\dfrac{dV}{dt} + \dfrac{d}{dt}\dfrac{V^2}{\rho} = 3\dfrac{V}{\rho}\dfrac{dV}{dt} - \dfrac{V^3}{\rho^2}\dfrac{d\rho}{ds}, \\ \mathcal{A}_b = \dfrac{V^3}{\rho\rho_1}. \end{cases}$$

On peut mettre $\mathcal{A}_n$ sous une autre forme. Soient, en effet (*fig.* 44),

Fig. 44.



O, O' les centres de courbure de *abc*, *bcd*;
OA l'intersection des plans normaux en *a* et *b* à *ab* et *bc*;
O'A' celle des plans normaux en *b* et *c* à *bc* et *cd*;
i l'intersection de la direction de *b*O avec celle de O'A'.

Comme l'angle O'*i*O ne diffère de 90° que d'une quantité du premier ordre, on a

$$Oi = d\rho.$$

Mais O*i* est l'élément d'arc en O de la section normale à OA de la surface polaire, section pour laquelle l'angle de contingence est $d\alpha$. Si donc on désigne par $\mathcal{R}$ le rayon de courbure principal de cette surface, on a

$$\pm\mathcal{R} = \frac{d\rho}{d\alpha} = \rho\frac{d\rho}{ds},$$

en prenant le signe + ou le signe —, selon que ρ croîtra ou décroîtra; par suite,

$$(2)\qquad \mathcal{A}_n = 3\frac{V}{\rho}\frac{dV}{dt} - (\pm\mathcal{R})\frac{V^3}{\rho^3}.$$

Dans le cas des courbes planes, $\mathcal{R}$ sera le rayon de la développée.

34. *Application à la détermination du rayon de courbure de la développée de quelques courbes planes.*

1° *Cycloïde.* — Reportons-nous au mode de génération de la courbe, tel qu'il a été défini au n° 15 et à la figure qui s'y rapporte.

L'accélération du premier ordre $\omega^2\overline{Om}$ donnera lieu à l'accélération du second ordre $-\omega^3\overline{Om}$ dirigée suivant la tangente au cercle, dont la projection, suivant la normale mb, sera

$$\mathcal{A}_n = -\omega^3 Om \sin\widehat{abm} = -\omega^3\frac{c'}{2},$$

en désignant par c' la corde $\overline{ma} = \overline{cg}$.

L'accélération $\omega^2\overline{Om}$ donne la composante tangentielle

$$\frac{dV}{dt} = -\omega^2\frac{c'}{2}.$$

D'ailleurs

$$V = \omega c, \qquad \rho = 2c,$$

et, en faisant ces substitutions dans la formule (2), on retrouve le résultat connu

$$\mathcal{R} = 2c'.$$

2° *Sections coniques.* — Nous supposerons que l'ellipse est décrite par un point dont l'accélération est dirigée vers un centre fixe et est proportionnelle à la distance à ce centre, que l'hyperbole est décrite de la même manière, lorsque l'accélération change de sens, et enfin que la parabole est la trajectoire d'un point dont l'accélération est constante en grandeur et en direction. Il est évident que dans ces trois cas l'accélération du second ordre se réduit à sa composante tangentielle et l'équation (2) nous donne, en y faisant $\mathcal{A}_n = 0$,

$$\frac{\mathcal{R}}{\rho} = \frac{3\rho}{V^2}\frac{dV}{dt}.$$

Si δ est l'angle formé par la normale avec le diamètre cor-

respondant, on a

$$\frac{dV}{dt} = \frac{V^2}{\rho} \operatorname{tang} \delta;$$

d'où

$$(3) \qquad \operatorname{tang} \delta = \frac{1}{3} \frac{\mathcal{R}}{\rho},$$

relation qui a lieu pour une courbe plane quelconque, en considérant l'angle δ comme se rapportant à la direction des diamètres de la parabole osculatrice.

35. *Rayon de torsion de l'hélice.* — Reportons-nous au mode de description de l'hélice et aux notations du n° 17. Nous avons trouvé

$$V = v\sqrt{1 + \cot^2 \beta} = \frac{v}{\sin \beta},$$

$$\rho = R(1 + \cot^2 \beta) = \frac{R}{\sin^2 \beta}.$$

Soit $\mathcal{R}'$ le rayon de courbure de la développée de la section droite.

Dans le mouvement du point, suivant la section droite du cylindre, les accélérations du second ordre, tangentielle et normale, sont, d'après la première des formules (1) et la formule (2), $-\frac{v^3}{R^2}$, $\frac{v^3}{R^3}(\pm \mathcal{R}')$. On déduit de là, dans le mouvement hélicoïdal,

$$\mathcal{A}_n = -\frac{v^3}{R^3}(\pm \mathcal{R}'),$$

$$\mathcal{A}_b = \frac{v^3}{R^2} \cos \beta.$$

Mais nous avons aussi, d'après les formules précitées,

$$\mathcal{A}_n = \frac{V^3}{\rho^3}(\pm \mathcal{R}) = \frac{v^3}{R^3}(\pm \mathcal{R}) \sin^3 \beta,$$

$$\mathcal{A}_b = \frac{V^3}{\rho \rho_1} = \frac{v^3}{\rho_1 R \sin \beta};$$

par suite,

$$\mathcal{R} = \frac{\mathcal{R}'}{\sin^3\beta},$$

$$\rho_1 = \frac{R}{\sin\beta\cos\beta} = \rho \tang\beta.$$

Si le cylindre est circulaire, on a $\mathcal{R}' = 0$, par suite $\mathcal{R} = 0$, ce qui devait être.

Dans notre *Traité de Cinématique pure* nous avions donné les expressions des composantes de l'accélération du second ordre dans le mouvement relatif d'un point par rapport à un système invariable. Nous ne pensons pas devoir reproduire ici nos anciennes formules, qui sont assez compliquées et qui ne peuvent d'ailleurs conduire et assez péniblement qu'à des résultats connus.

§ II. — *De l'accélération du second ordre dans le mouvement d'une figure plane dans son plan.*

36. Comme cette question ne peut avoir de rapport qu'avec la Géométrie, nous supposerons constante la rotation instantanée ω.

Soient, à l'instant t (*fig.* 45),

O le centre instantané de rotation de la figure;
S le centre des accélérations du premier ordre;
m la position d'un point de la figure.

Au bout du temps dt, le centre des accélérations sera venu en S′ et le point m en m'. Nous désignerons par $u = \frac{SS'}{dt}$ ce que l'on peut appeler la *vitesse du centre des accélérations*.

L'accélération $\omega^2\,\overline{m'S'}$ du point m', dirigée de m' vers S′, peut être considérée comme se composant des suivantes :

$$-\omega^2\overline{SS'} = -\omega^2 u\,dt \quad \text{suivant } u;$$

$$\omega^3\overline{m'S} \qquad\qquad \text{»} \quad m'S.$$

La dernière peut elle-même se décomposer en

$\omega^2 \overline{mS}$ suivant mS, ce qui n'est autre chose que l'accélération en m;

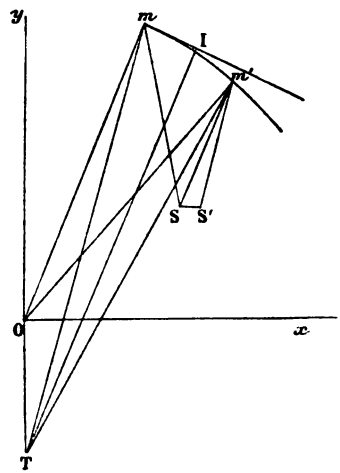
$$-\omega^2 \overline{mm'} = -\omega^3 Om\, dt \quad \text{suivant } mm'.$$

Il suit de là que l'accélération du second ordre $\mathcal{A}$ de m se composera de

$$-\omega^2 u \quad \text{suivant } u;$$
$$-\omega^3 Om \quad \text{»} \quad mm'.$$

Soient Ox la parallèle en O à u et Oy sa perpendiculaire au

Fig. 45.



même point; x, y les coordonnées de m. Nous aurons

$$(1) \qquad \begin{cases} \mathcal{A}_x = -\omega^2 u - \omega^3 y, \\ \mathcal{A}_y = \omega^3 x. \end{cases}$$

On voit ainsi qu'il existe sur Oy un point T dont l'accélération du second ordre est nul et qui est défini par

$$y_0 = -\frac{u}{\omega}.$$

Nous avons alors

$$(2)\qquad \begin{cases} \mathcal{A}_x = -\omega^3(y - y_0), \\ \mathcal{A}_y = \omega^3 x, \\ \mathcal{A} = \omega^3 \overline{\mathrm{T}m}; \end{cases}$$

d'où il suit que $\mathcal{A}$ est dirigé en sens inverse de la vitesse qu'aurait le point m si la rotation instantanée avait lieu autour du point T, que nous appellerons *centre des accélérations du second ordre.*

On voit que ce centre jouit de cette propriété que *l'accélération du second ordre d'un point quelconque de la figure est la même que si la rotation instantanée avait lieu effectivement autour du même centre.*

Supposons que les conditions qui définissent le mouvement de la figure nous aient permis de déterminer la position du point T, celles de O et S étant d'ailleurs censées connues, et posons $\overline{\mathrm{O}m} = r$, $\overline{\mathrm{S}m} = r'$, $\overline{\mathrm{T}m} = r''$; nous avons

$$\mathrm{V} = \omega r, \qquad \frac{\mathrm{V}^2}{\rho} = \omega^2 r' \cos(r, r'), \qquad \frac{d\mathrm{V}}{dt} = \omega^2 r' \sin(r, r'),$$

et, par l'élimination de ρ et de V, l'équation (2) du n° 33 prend la forme

$$\mathcal{A}_n = \omega^3 \left[\frac{3}{2}\frac{r'^2}{r}\sin 2(r, r') - (\pm \mathcal{R})\frac{r'^3}{r^3}\cos^3(r, r')\right].$$

Mais, d'après ce que nous venons d'établir, nous avons aussi

$$\mathcal{A}_n = \omega^3 r'' \sin(r, r'');$$

par suite,

$$(3)\qquad (\pm \mathcal{R})\frac{r'^3}{r^3}\cos^3(r, r') = \frac{3}{2}\frac{r'^2}{r}\sin 2(r, r') - r''\sin(r, r''),$$

d'où l'on déduira le rayon de courbure de la développée de la courbe décrite par le point m, et qu'il sera facile d'ailleurs de construire géométriquement.

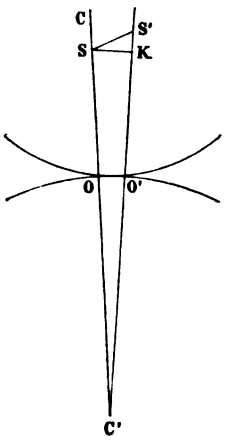
37. *Détermination du centre des accélérations du second ordre dans quelques cas particuliers.*

1° *L'une des conditions du mouvement de la figure est que l'un de ses points décrive une courbe donnée.* — Si m est ce point, $\mathcal{R}$ est connu; l'équation (3) fera connaître $r''\sin(r, r'')$, c'est-à-dire la projection Im de r'' sur la tangente en m. Le point I se trouvant déterminé, on connaîtra une droite IT, laquelle se trouvera le centre T.

Dans le cas où le mouvement de la courbe serait complètement défini par une seconde condition semblable à la précédente, le centre T se trouvera à l'intersection de deux droites connues.

2° *Le mouvement de la figure est défini par le roulement d'une courbe sur une courbe fixe.* — Soient, à l'instant t (*fig.* 46),

Fig. 46.



O le point de contact des deux courbes;

$R = CO$, $R' = C'O$ les rayons de courbure de la courbe mobile et de la courbe fixe;

$d\varepsilon$, $d\varepsilon'$ les angles de contingence de ces deux courbes en O;

$\Gamma = \frac{dR}{d\varepsilon}$, $\Gamma' = \frac{dR}{d\varepsilon'}$ les rayons de courbure de leurs développées;

$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R'}$;
S le centre des accélérations du premier ordre;
O', S' les positions que prennent O, S au bout du temps dt;
K la projection de S sur O'S';
ds l'élément OO'.

Nous savons (n° 18) que

$$SO = \lambda,$$
$$\frac{ds}{dt} = \lambda\omega.$$

Nous avons

$$\frac{S'K}{dt} = \frac{d\lambda}{dt} = \frac{d\lambda}{ds}\frac{ds}{dt} = \omega\lambda\frac{d\lambda}{ds} = -\omega\lambda^3 d\frac{1}{ds};$$

mais

$$\frac{d\frac{1}{\lambda}}{ds} = -\left(\frac{1}{R^2}\frac{dR}{ds} + \frac{1}{R'^2}\frac{dR'}{ds}\right)$$
$$= -\left(\frac{1}{R^2}\frac{dR}{d\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{ds} + \frac{1}{R'^2}\frac{dR'}{d\varepsilon'}\frac{d\varepsilon'}{ds}\right) = -\left(\frac{\Gamma}{R^3} + \frac{\Gamma'}{R'^3}\right);$$

par suite, pour la composante de u suivant O'S',

$$\frac{S'K}{dt} = \omega\lambda^3\left(\frac{\Gamma}{R^3} + \frac{\Gamma'}{R'^3}\right).$$

D'autre part, nous avons, pour l'autre composante de u,

$$\frac{SK}{dt} = \frac{ds}{dt}\frac{R'+\lambda}{R'} = \omega\lambda\frac{R'+\lambda}{R'};$$

d'où

$$\operatorname{tang} S'SK = \frac{\lambda^2\left(\frac{\Gamma}{R^3} + \frac{\Gamma'}{R'^3}\right)}{\left(1 + \frac{\lambda}{R'}\right)},$$

$$\frac{u}{\omega} = \lambda\sqrt{\lambda^4\left(\frac{\Gamma}{R^3} + \frac{\Gamma'}{R'^3}\right)^2 + \left(1 + \frac{\lambda}{R'}\right)^2},$$

ce qui définit complètement la direction de u et la position du centre des accélérations du second ordre.

NOTE I.

SUR UN THÉORÈME DE BINET RELATIF AUX MOMENTS D'INERTIE.

Ce théorème, qui remonte à 1811, est très intéressant et aurait dû être inséré au § III du Chapitre V de la partie Mécanique de ce Volume; mais l'auteur l'avait complètement perdu de vue : il a toutefois jugé convenable d'en faire l'objet d'une Note spéciale.

Soient

Gx, Gy, Gz les axes principaux d'inertie menés par le centre de gravité de la masse M du corps;

Ma^2, Mb^2, Mc^2 les moments d'inertie relatifs à ces axes;

O un point du corps dont les coordonnées sont χ, η, ζ;

$\Delta = \sqrt{\chi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$ la distance OG;

α, β, γ les angles formés avec Ox, Oy, Oz, par un axe Ov issu du point O;

$M\rho^2$ le moment d'inertie de M par rapport à Ov.

Le carré de la distance de G à Ov étant

$$\Delta^2 - (\chi \cos\alpha + \eta \cos\beta + \zeta \cos\gamma)^2,$$

on a, en se reportant à des théorèmes connus,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \rho^2 &= a^2 \cos^2\alpha + b^2 \cos^2\beta + c^2 \cos^2\gamma \\ &\quad + \Delta^2 - (\chi \cos\alpha + \eta \cos\beta + \zeta \cos\gamma)^2 \\ &= (a^2 + \Delta^2) \cos^2\alpha + (b^2 + \Delta^2) \cos^2\beta \\ &\quad + (c^2 + \Delta^2) \cos^2\gamma - (\chi \cos\alpha + \eta \cos\beta + \zeta \cos\gamma)^2. \end{aligned}\right.$$

La condition pour que l'axe Ov soit principal est

$$d\rho^2 = 0$$

ou

$$\begin{aligned} &(a^2 + \Delta^2) \cos\alpha \, d\cos\alpha + \ldots \\ &\quad - (\chi \cos\alpha + \eta \cos\beta + \zeta \cos\gamma)(\chi \, d\cos\alpha + \ldots) = 0. \end{aligned}$$

D'ailleurs, $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ donne

$$-\cos\alpha\, d\cos\alpha - \cos\beta\, d\cos\beta - \cos\gamma\, d\cos\gamma = 0.$$

Ajoutant cette équation multipliée par l'indéterminée k à la précédente et égalant à 0 les coefficients des différentielles, on obtient

$$(2)\quad \begin{cases} (a^2+\Delta^2-K)\cos\alpha = \chi(\chi\cos\alpha + \eta\cos\beta + \zeta\cos\gamma), \\ (b^2+\Delta^2-K)\cos\beta = \eta(\chi\cos\alpha + \eta\cos\beta + \zeta\cos\gamma), \\ (c^2+\Delta^2-K)\cos\gamma = \zeta(\chi\cos\alpha + \eta\cos\beta + \zeta\cos\gamma). \end{cases}$$

En ajoutant les équations (2) respectivement multipliées par $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, on trouve

$$\begin{aligned}(a^2+\Delta^2)\cos^2\alpha + (b^2+\Delta^2)\cos^2\beta \\ + (c^2+\Delta^2)\cos^2\gamma - (\chi\cos\alpha + \ldots)^2 = K\end{aligned}$$

ou, en se reportant à l'équation (1),

$$K = \rho^2.$$

Si l'on remplace l'inconnue ρ^2 par

$$(3)\qquad \lambda = \rho^2 - \Delta^2,$$

les équations (2) donnent

$$(4)\quad \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{\chi(\chi\cos\alpha + \eta\cos\beta + \zeta\cos\gamma)}{a^2-\lambda}, \\ \cos\beta = \dfrac{\eta(\chi\cos\alpha + \eta\cos\beta + \zeta\cos\gamma)}{b^2-\lambda}, \\ \cos\gamma = \dfrac{\zeta(\chi\cos\alpha + \eta\cos\beta + \zeta\cos\gamma)}{c^2-\lambda}. \end{cases}$$

En ajoutant, après avoir multiplié par χ, η, ζ, on obtient

$$(5)\qquad \frac{\chi^2}{a^2-\lambda} + \frac{\eta^2}{b^2-\lambda} + \frac{\zeta^2}{c^2-\lambda} = 0$$

ou

$$(5')\quad \begin{cases} \chi^2(b^2-\lambda)(c^2-\lambda) + \eta^2(c^2-\lambda)(a^2-\lambda) \\ \quad + \zeta^2(a^2-\lambda)(b^2-\lambda) - (a^2-\lambda)(b^2-\lambda)(c^2-\lambda) = 0, \end{cases}$$

équation du troisième degré en λ, ce qui devait être.

Soit $a^2 > b^2 > c^2$.

Pour $\lambda = -\infty$, le premier membre de (5′) prend le signe $-$;
» $\lambda = c^2$, » » $+$;
» $\lambda = b^2$, » » $-$;
» $\lambda = a^2$, » » $+$;

d'où il suit que les racines de l'équation (5′) ont pour limites

$$\begin{aligned} &\lambda_1 < c^2, \\ &\lambda_2 > c^2 < b^2, \\ &\lambda_3 > b^2 < a^2. \end{aligned}$$

Ces valeurs sont les paramètres des surfaces homofocales passant par le point O, représentées par

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{x^2}{a^2-\lambda_1} + \frac{y^2}{b^2-\lambda_1} + \frac{z^2}{c^2-\lambda_1} = 1, \\ &\frac{x^2}{a^2-\lambda_2} + \frac{y^2}{b^2-\lambda_2} - \frac{z^2}{\lambda_2-c^2} = 1, \\ &\frac{x^2}{a^2-\lambda_3} - \frac{y^2}{\lambda_3-b^2} - \frac{z^2}{\lambda_3-c^2} = 1, \end{aligned}\right.$$

et qui sont les homofocales de l'ellipsoïde

$$(7)\qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^3} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Les équations (4) peuvent s'écrire

$$\frac{\cos\alpha}{\frac{\xi}{a^2-\lambda}} = \frac{\cos\beta}{\frac{\eta}{b^2-\lambda}} = \frac{\cos\gamma}{\frac{\zeta}{c^2-\lambda}}.$$

Il suit de là que *les axes principaux relatifs à* O *sont normaux aux surfaces* (6) *et, par suite, tangents à leurs intersections.*

NOTE II.

SUR LE CHOC DE DEUX CORPS LIBRES.

Les calculs développés, à partir de la formule (A) jusqu'à la formule (10) du n° 69, sont assez laborieux et peuvent être notablement réduits par les considérations suivantes :

En multipliant le moment d'inertie de M, relatif à l'axe instantané $G\omega$, par le carré de la vitesse angulaire ω, on obtient immédiatement, pour la force vive due à cette vitesse,

$$M(a^2n^2 + b^2p^2 + c^2q^2 - 2\chi pq - 2\eta qn - 2\zeta np) = Mf(n, p, q).$$

La fonction f étant une fonction homogène du second degré de n, p, q, on a

$$(1) \qquad n\frac{\partial f}{\partial n} + p\frac{\partial f}{\partial p} + q\frac{\partial f}{\partial q} = 2f.$$

Si l'on remarque que $P_x = \frac{M}{2}\frac{\partial f}{\partial n}, \cdots$ (¹), on a, au lieu des équations (3), après avoir éliminé l'impulsion au moyen de la relation (1),

$$\frac{\partial f(n, p, q)}{\partial n} - \frac{\partial f(n_0, p_0, q_0)}{\partial n_0} = 0,$$

$$\frac{\partial f(n, \ldots)}{\partial p} - \frac{\partial f(n_0, \ldots)}{\partial p_0} = -2Z_1(V - V_0),$$

$$\frac{\partial f(n, \ldots)}{\partial q} - \frac{\partial f(n_0, \ldots)}{\partial q_0} = 2Y_1(V - V_0)$$

(¹) On obtient de suite ces relations en remarquant que

$$Mf(n, p, q) = P\omega = P_x n + P_y p + P_z q$$

ou

$$\frac{M}{2}\left(n\frac{df}{dn} + p\frac{df}{dp} + q\frac{df}{dq}\right) = P_x n + P_y p + P_z q,$$

ce qui conduit aux relations dont il s'agit.

ou

$$\frac{\partial f(n-n_0, p-p_0, q-q_0)}{\partial(n-n_0)} = 0,$$

$$\frac{\partial f(n-n_0, \ldots)}{\partial(p-p_0)} = -2Z_1(V-V_0),$$

$$\frac{\partial f(n-n_0, \ldots)}{\partial(q-q_0)} = 2Y_1(V-V_0).$$

En substituant les valeurs (5), on obtient, au lieu de (6),

$$\text{(II)} \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial f(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial \alpha} = 0, \\ &\frac{\partial f(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial \beta} = -2Z_1, \\ &\frac{\partial f(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial \gamma} = 2Y_1. \end{aligned} \right.$$

Si l'on ajoute les équations (II), multipliées respectivement par α, β, γ et que l'on ait égard à la relation (I), on trouve

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = -\alpha Z_1 + \beta Y_1.$$

Comme par sa nature la quantité $f(\alpha, \beta, \gamma)$ est essentiellement positive, la constante

$$\text{(III)} \qquad \lambda = 1 - \alpha Z_1 + \beta Y_1 = 1 + f(\alpha, \beta, \gamma)$$

est au moins égale à l'unité.

L'accroissement de la force vive après le choc est

$$F = M[V^2 - V_0^2 + f(n, p, q) - f(n_0, p_0, q_0)].$$

Or

$$\begin{aligned} f(n, p, q) &= f[\alpha(V-V_0) + n_0, \beta(V-V_0) + p_0, \gamma(V-V_0) + q_0] \\ &= f[\alpha(V-V_0), \beta(V-V_0), \gamma(V-V_0)] \\ &\quad + \frac{\partial f[\alpha(V-V_0), \beta(V-V_0), \gamma(V-V_0)]}{\partial[\alpha(V-V_0)]} n_0 \\ &\quad + \frac{\partial f[\alpha(V-V_0), \ldots]}{\partial[\beta(V-V_0)]} p_0 \\ &\quad + \frac{\partial f[\alpha(V-V_0), \ldots]}{\partial[\gamma(V-V_0)]} q_0 + f(n_0, p_0, q_0); \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
&f(n,p,q)-f(n_0,p_0,q_0)\\
&\quad=(V-V_0)^2 f(\alpha,\beta,\gamma)+(V-V_0)\left[n_0\frac{\partial f(\alpha,\beta,\gamma)}{\partial\alpha}+p_0\frac{\partial f(\alpha,\ldots)}{\partial\gamma}+q_0\frac{\partial f(\alpha,\ldots)}{\partial\gamma}\right]\\
&\quad=(\lambda-1)(V-V_0)^2+(V-V_0)\left[n_0\frac{\partial f(\alpha,\ldots)}{\partial\alpha}+p_0\frac{\partial f(\alpha,\ldots)}{\partial\beta}+q_0\frac{\partial f(\alpha,\ldots)}{\partial\gamma}\right].
\end{aligned}$$

Les équations (II) donnent, en ayant ensuite égard aux formules (1),

$$\begin{aligned}
&n_0\frac{\partial f(\alpha,\ldots)}{\partial\alpha}+p_0\frac{\partial f(\alpha,\ldots)}{\partial\beta}+q_0\frac{\partial f(\alpha,\ldots)}{\partial\gamma}\\
&\quad=2[-p_0Z_1+q_0Y_1]=2(W_0-V_0).
\end{aligned}$$

On a donc

$$f(n,p,q)-f(n_0,p_0,q_0)=(\lambda-1)(V-V_0)^2+2(V-V_0)(W_0-V_0),$$

et enfin

$$F=M(V-V_0)[\lambda(V-V_0)+2W_0].$$

La force vive due aux vitesses perdues est

$$\begin{aligned}
G&=M(V-V_0)^2+Mf(n-n_0,p-p_0,q-q_0)\\
&=M(V-V_0)^2+M(V-V_0)^2 f(\alpha,\beta,\gamma)
\end{aligned}$$

ou

$$G=\lambda(V-V_0)^2.$$

FIN DU TOME SEPTIÈME.

14631 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

3 2044 081 577 066